



Modellierung und Simulation eines Magnetschwebeversuchs basierend auf reellen Messdaten

Masterprojekt

im Masterstudiengang
Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von

Bauer Matthias

Matr.-Nr.: 787759

am 17. Januar 2020
an der Hochschule Rosenheim

Erstprüfer/in: Prof. Dr.-Ing. Peter Zentgraf, M.Sc.
Zweitprüfer/in: Prof. Dr.-Ing. Rainer Hagl

Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Simulation eines Magnetschwebeversuchs basierend auf real aufgenommenen Messdaten in Matlab/Simulink. In Vorarbeit wurde die magnetische Flussdichte von Spulen und Permanentmagneten dreidimensional in Bezug auf den Ort aufgenommen. Auf dieser Grundlage werden physikalische Modelle mit den realen Daten abgeglichen. Diese verifizierten physikalischen Modelle dienen für die Simulation des Magnetschwebeaufbaus. Im ersten Schritt wird ein elementarer Aufbau eines Magnetschwebeversuchs diskutiert. Hier wird ein magnetischer Dipol betrachtet, der durch eine Spule in Schwebe gehalten wird. Im Anschluss werden Kraft- und Momentenwirkungen auf einen Permanentmagneten in einem äußeren magnetischen Feld in einer Simulation betrachtet. Das Magnetfeld wird dabei von mehreren Spulen und einem Ringmagneten erzeugt. Dabei stellen sich verschiedene Problemstellungen für den Aufbau heraus. Abschließend werden diese Aspekte analysiert und verschiedene Lösungsansätze dargestellt.

Abstract

This paper presents a simulation of a magnetic levitation experiment. It is based on real measurement data and implemented in Matlab/Simulink. In a first study the magnetic flux densities of a coil and permanent magnets were measured depending on location and in the three directions of the space. Based on the results physical models were verified. These equations were used for the simulation of the magnetic levitation experiments. In a first step a basic structure was analyzed. The magnetic force generated by the field of an electric coil should levitate a magnetic dipole. In the next step the forces and moments on a permanent magnet in an external field were simulated. The magnetic field is generated by coils and a permanent magnet shaped as a ring. In this assembly some problems are identified. These aspects are researched, and different approaches are represented.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Kurzfassung | 2 |
| Abstract | 2 |
| Inhaltsverzeichnis | 3 |
| Physikalische Größen | 6 |
| Einführung | 7 |
| 1 Stand der Technik | 10 |
| 2 Grundlagen | 11 |
| 2.1 Mathematische Grundlagen..... | 11 |
| 2.1.1 Dyadisches Produkt | 11 |
| 2.1.2 Laplace Operator | 11 |
| 2.1.3 Nabla Operator | 11 |
| 2.1.4 Gradient (in kartesischen Koordinaten)..... | 11 |
| 2.1.5 Divergenz (in kartesischen Koordinaten)..... | 12 |
| 2.1.6 Rotation | 12 |
| 2.1.7 Gaußscher Integralsatz im Raum..... | 12 |
| 2.1.8 Integralsatz von Stokes..... | 13 |
| 2.1.9 Laplace Gleichung..... | 13 |
| 2.1.10 Poisson Gleichung | 13 |
| 2.1.11 Zusammenhänge aus der Vektoranalysis | 13 |
| 2.1.12 Drehmatrizen | 14 |
| 2.2 Magnetostatik | 14 |
| 2.2.1 Grundlagen, Ampere'sches Gesetz und Quellfreiheit..... | 14 |
| 2.2.2 Grundlagen Biot-Savart'sches Gesetz..... | 17 |
| 2.2.3 Feld eines Dipols ohne Berücksichtigung der Geometrie | 18 |
| 2.2.4 Feld eines Dipols unter Berücksichtigung der Geometrie (Zylinder) | 19 |
| 2.2.5 Kräfte und Drehmomente auf einen magnetischen Dipol im äußeren Feld | 23 |
| 2.2.6 Zeitkonstante einer Spule | 24 |
| 2.2.7 Materialgesetze im stationären Feld..... | 25 |
| 2.2.8 Theorem von Earnshaw | 26 |
| 3 Eingeschlagener Realisierungsweg | 28 |
| 3.1 Darstellung der behandelten Aspekte | 28 |
| 3.1.1 Verifizierung der physikalischen Modelle | 28 |
| 3.1.2 Simulation des umgekehrten Magnetschwebeversuchs | 28 |
| 3.1.3 Simulation von Kraft- und Momentwirkung auf einen Dipol in einem von Spulen und einem Ringmagneten erzeugten äußeren Feld..... | 29 |
| 3.2 Experimenteller Abgleich der physikalischen Modelle | 30 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2.1 | Physikalische Modelle der Spule..... | 30 |
| 3.2.2 | Darstellung der indirekten Proportionalität zwischen der magnetischen Flussdichte und dem Strom einer Spule | 39 |
| 3.2.3 | Magnetischer Dipol | 39 |
| 3.2.4 | Bewertung der beiden Modelle | 45 |
| 3.2.5 | Experiment zur Berechnung der magnetischen Kraft..... | 46 |
| 3.2.6 | Positions- und Lagebestimmung aus Magnetfeldmessung..... | 49 |
| 3.2.7 | Darstellung der physikalischen Gesetze in Bezug auf ihre diskrete Form | 49 |
| 3.3 | Simulation einer Regelung eines elementaren Dipolmagnetschwebeversuchs... | 53 |
| 3.3.1 | Entwurf des Simulationsmodells | 54 |
| 3.3.2 | Allgemeine analytische Modellierung..... | 55 |
| 3.3.3 | Aufstellen der Streckenübertragungsfunktion | 56 |
| 3.3.4 | Stabilität des geschlossenen Regelkreises | 56 |
| 3.3.5 | Allgemeiner Ansatz | 57 |
| 3.3.6 | Stabilitätsbetrachtung für den P-Regler..... | 58 |
| 3.3.7 | Stabilitätsbetrachtung für PD-Regler | 58 |
| 3.3.8 | Implementierung des Simulink-Modells | 59 |
| 3.3.9 | Streckenidentifikation und Regler Auslegung..... | 66 |
| 3.3.10 | Auslegung des Reglers | 68 |
| 3.4 | Realer Versuchsaufbau | 70 |
| 3.4.1 | Aufbau der Regelstrecke | 70 |
| 3.4.2 | Darstellung der Problematik..... | 75 |
| 3.5 | Modellierung des Verhaltens in Bezug auf Moment- und Kraftwirkung auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld erzeugt von mehreren Spulen und einem Ringmagnet..... | 75 |
| 3.5.1 | Schematischer Aufbau | 75 |
| 3.5.2 | Entwurf Model und Regelung | 76 |
| 3.6 | Test und Aufbau der verschiedenen Blöcke | 81 |
| 3.6.1 | Dipol (Matlabfunction 4)..... | 82 |
| 3.6.2 | Feldberechnung (Subsystem 1) | 83 |
| 3.6.3 | Spulen | 85 |
| 3.6.4 | Kraft- und Momentenberechnung (Subsystem 7) | 94 |
| 3.6.5 | Berechnung der magnetischen Flussdichte an den Sensoren (Subsystem 5) | 95 |
| 3.6.6 | Addition der magnetischen Flussdichte des Dipols an den Sensorpositionen (Matlabfunction 6)..... | 95 |
| 3.6.7 | Berechnung der magnetischen Flussdichte verursacht durch den Dipol durch Subtraktion von äußerem Feld an den Sensorpositionen (Matlabfunction 8) | 96 |
| 3.6.8 | Evaluierung des Simulationsmodells | 96 |
| 3.6.9 | Weiterführende Arbeiten und Lösungsansätze..... | 99 |
| 4 | Fazit und Ausblick..... | 102 |
| | Anhang:..... | i |

| | | |
|----------|--|-------------|
| 4.1 | Lage- und Positionsbestimmung Herleitung | i |
| 5 | Schaltpläne | xiii |
| 5.1 | Schaltplan des bestehenden Systems | xiv |
| 5.2 | Schaltplan Spulenbestromung | xvii |
| 6 | Datenblätter | xix |
| 6.1 | Spule Visaton..... | xix |
| 6.2 | Hallsensor Honeywell SS490 | xx |
| 7 | Literaturverzeichnis | xxiv |
| | Eidesstattliche Versicherung | xxv |
| | Auszug aus dem Strafgesetzbuch (StGB)..... | xxv |

Physikalische Größen

| Physikalische Größe | Formelzeichen | Einheit |
|------------------------------------|---------------|----------------------|
| Magnetische Durchflutung | Θ, U_m | A |
| Magnetische Feldstärke | H | $\frac{A}{m}$ |
| Magnetischer Fluss | Φ | Wb = Vs |
| Magnetische Flussdichte | B | $T = \frac{Vs}{m^2}$ |
| Magnetische freie Permeabilität | μ_0 | $\frac{Vs}{Am}$ |
| Relative magnetische Permeabilität | μ_r | - |
| Magnetisches Dipolmoment | m | Am^2 |
| Magnetisierung | M | Am |
| Induktivität | L | H |
| Gewichtskraft | F_g | N |
| Magnetische Kraft | F_{mag} | N |

Tabelle 1 Physikalische Größen

Einführung

Die Regelungstechnik und Elektrodynamik stellen in den Ingenieurwissenschaften wichtige Teilbereiche dar, die für viele technische Entwicklungen von großer Bedeutung sind. Bei einem Steuer- oder Regelungsvorgang werden physikalische oder chemische Größen gemessen, geregelt und gezielt beeinflusst, um einen Sollzustand beziehungsweise -wert zu erreichen. Typische Anwendungen sind im Alltag Temperaturregelungen von Wohnraumheizungen oder auch Abstandsassistenten im Auto. Die Elektrodynamik ist im Zeitalter der Digitalisierung und Automation nicht mehr wegzudenken. Sie legt die Grundlage für alle elektrischen beziehungsweise elektromagnetischen Geräte, Maschinen und Steuerungen. Die Maxwellgleichungen stellen dabei die Basis für fast alle Berechnungen.

Im Gegensatz zur Steuerung beinhaltet die Regelung eine Rückführung der Regelgröße, um einen Sollwert zu erreichen. Hierfür sind geeignete Sensoren notwendig. Die Sensorik nimmt in der Zeit der Digitalisierung einen immer größeren Stellenwert in der Technik und in der Ingenieursarbeit ein. So entwickeln sich Sensoren von normalen analogen Messinstrumenten zu komplexen Systemen. Dabei werden sie in komplexe integrierte Schaltungen eingebunden. Dadurch können sie in Bussystemen und Netzwerken digital ausgelesen oder mit Hilfe von geeigneten Tools konfiguriert werden.

Diese Grundlagen sind für Ingenieure verschiedenster Fachrichtungen essentiell und sollen deshalb in der Ausbildung beziehungsweise im Studium vermittelt werden.

Dieses Wissen ist für unterschiedlichste Anwendungen notwendig. Ein Beispiel hierfür sind Magnetschwebelager und Magnetschwebebahnen. In Magnetlagern ist die Welle berührungs- und nahezu reibungsfrei gelagert. In diesem konkreten Fall kann sogar die Dämpfung von Schwingungen während des Betriebs aktiv beeinflusst werden. Diese Lagerart wird für schnell rotierende Systeme genutzt. Beispiele finden sich in der Hochgeschwindigkeitszerspannung oder in Zentrifugen. In Magnetschwebebahnen werden Magnetfelder genutzt, um Fahrzeuge in einen Schwebезustand zu bringen und anschließend zu beschleunigen beziehungsweise abzubremesen.

Durch das aktuelle Thema Elektromobilität rückt die Thematik der Magnetfeldtheorie wieder in den Vordergrund. Fortbewegungsmittel wie Magnetschwebebahnen und Elektroautos werden in Zukunft eine große Rolle spielen. Aufgrund dieser Entwicklung sollten Studenten Erfahrungen und Wissen in den Grundlagen und Möglichkeiten in der die elektromagnetische Feldtheorie in ihrer Lehre sammeln. Jedoch können magnetische Felder von menschlichen Sinnen nicht einfach erfasst werden. So soll zur Veranschaulichung ein Ansatz für einen Versuchsaufbau erarbeitet werden, der die Eigenschaften und Grundlagen von Magnetfeldern anschaulich darstellt.

Die Grundidee entstand durch einen faszinierenden Eye-Catcher beziehungsweise Dekogegenstand - ein schwebender Globus. Schweben und Fliegen begeistert die Menschen schon seit langer Zeit. In folgendem Bild schwebt der Erdball wie von Geisterhand über einer Plattform.



Abbildung 1 Schwebender Globus

Nach einer kurzen Analyse wird klar, dass sich in der Kugel ein Magnet mit einem Gewicht von circa 200 g befindet. Die Plattform besteht aus einem Ferrit Permanent-ringmagnet und vier Spulen. Im Zentrum des Ringmagneten befinden sich drei Hallensensoren, die die herrschende magnetische Flussdichte messen und das aufgenommene Messsignal an die Operationsverstärker weitergeben. Diese erzeugen dann das Stellsignal für die Leistungstransistoren und regulieren damit den Strom für die Spulen. Diese Elektromagneten beeinflussen das Magnetfeld, sodass der Erdball in der Schwebelage gehalten wird.

Das Endziel für die Zukunft ist die Entwicklung und Realisierung eines Magnetschweberversuchs mit Hilfe eines Microcontrollers und entsprechender Hardware. Der Schwebemagnet soll dabei nicht nur auf einen Punkt beharren, sondern auch vorgegebene Bahnen mit definierter Lage und Geschwindigkeit abwandern.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Simulation eines solchen Aufbaus. Um ein Basisverständnis über die Kräfte und Momente in einem Magnetfeld zu erhalten, wird zuerst ein einfacher Aufbau mit einer Spule, Hallensensoren und einem Schwebemagneten betrachtet. Mit diesem Basisverständnis wird das Verhalten eines Dipols in einem äußeren magnetischen Feld, das von einer Plattform mit Spulen und Ringmagnet erzeugt wird, betrachtet. Um eine richtige Anwendung der physikalischen Modelle sicherzustellen, werden diese im ersten Schritt überprüft. Der Abgleich ist notwendig, da die mathematischen Gleichungen nur für bestimmte Bereiche des Magnetfelds gelten. Abschließend werden die elementaren Erkenntnisse in eine Simulation übertragen und Aussagen über Probleme beziehungsweise Anhaltspunkte für die weiterführende Arbeit getroffen. Dazu werden die erprobten Modelle und Vorgehensweisen des ersten Versuchs verwendet und weiterentwickelt. Diese Erkenntnisse sollen in Zukunft bei der Entwicklung von realen Versuchsaufbauten beziehungsweise weiterführenden Simulationsmodellen helfen.

Die folgenden Abbildungen zeigen die beiden betrachteten Versuchsaufbauten. Die linke Skizze zeigt den vereinfacht angenommenen Aufbau und die rechte Seite die komplexere Form.

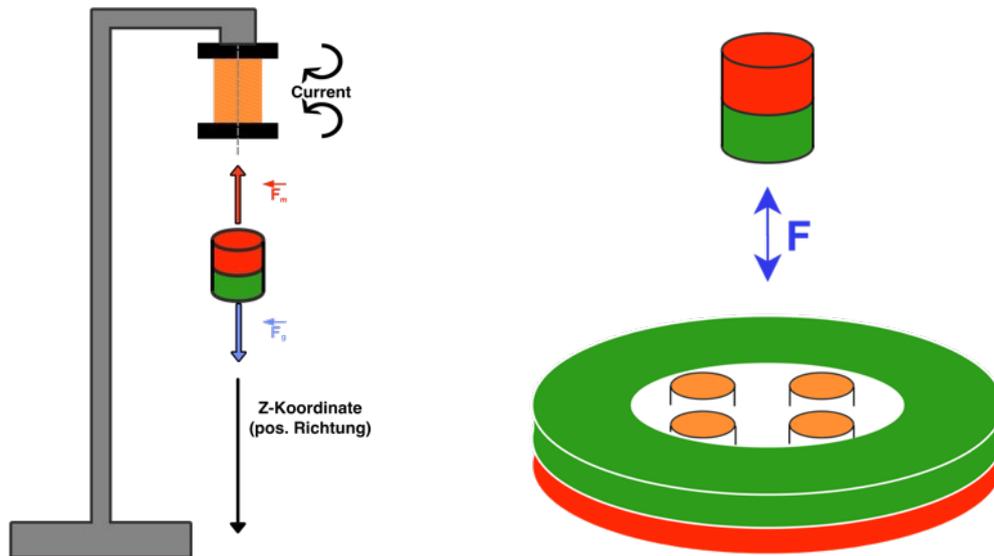


Abbildung 2 Allgemeine Versuchsaufbauten zur Simulation

1 Stand der Technik

Der Aufbau, der zur Anregung des Projekts führte, zeigt eine Möglichkeit der Realisierung. Das bestehende System besteht aus einem Ferritpermanentringmagneten und vier Spulen mit Ferritkernen. In der Mitte des Aufbaus befinden sich drei Hallensensoren.

Diese vermessen das Magnetfeld in die drei Raumrichtungen X, Y und Z.

Mit Hilfe von ausgelegten Widerständen und Operationsverstärkern wird der Schwebekörper in der Sollposition gehalten. Durch die blauen einstellbaren Potentiometer kann die Sollposition in X- und Y-Richtung justiert werden. Die Bestromung der Spulen erfolgt über Gegentaktstufen. So kann eine Kraftwirkung in X- und Y-Richtung erzeugt werden. Außerdem sind mehrere große Elektrolytkondensatoren verbaut, um schnell einen höheren Strom zu Verfügung zu stellen. Als Stromversorgung dient ein Netzteil das konstant 12 Volt und einen maximalen Strom von 0,5 Ampere liefert. Der Schwebekörper besteht aus einem zylindrischen, abgestuften Permanentmagneten. Dieser hat eine Masse von 200 Gramm und ist in einer Kunststoffkugel montiert.

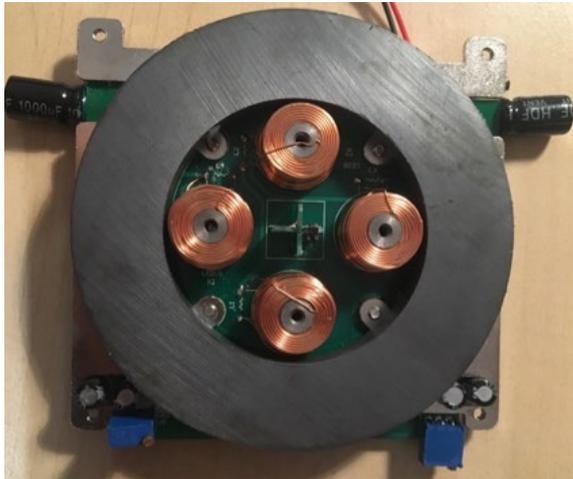


Abbildung 3 Plattform des bestehenden Magnetschweberversuchs

Ähnliche Aufbauten gibt es auch ohne aktive Regelung. Hier befindet sich in der Plattform nur ein Permanentringmagnet. Als Schwebekörper dient ein Kreisel. Dieser Kreisel ist ebenfalls ein Dauermagnet. Man dreht den Kreisel auf einer Kunststoffplatte über den Ring. Anschließend entfernt man die Startvorrichtung und der Kreisel schwebt. Voraussetzung für den Schwebevorgang ist eine bestimmte Drehfrequenz, die der Kreisel nicht unterschreiten darf. Ansonsten fällt der Kreisel zu Boden. In folgenden Kapiteln wird dieser Effekt unter dem Theorem von Earnshaw (2.2.8) erklärt.

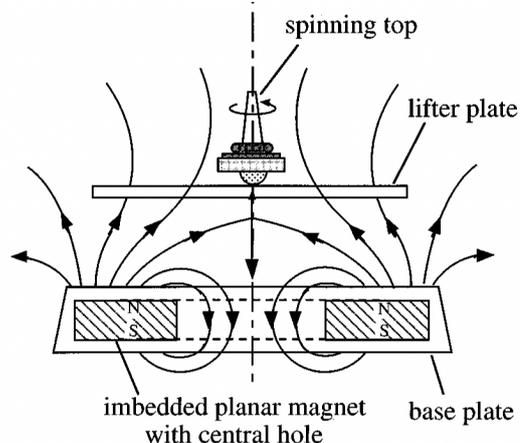


Abbildung 4 Levitron Kreisel

2 Grundlagen

2.1 Mathematische Grundlagen

Um die physikalische Modellierung eines Magnetschwebeversuchs zu implementieren sind verschiedene mathematische Grundlagen, die in der Feldtheorie angewandt werden, notwendig. Um das Verständnis der Modelle zu erleichtern, werden hier in Kurzform die relevanten mathematischen Grundlagen aufgeführt.

2.1.1 Dyadisches Produkt

Das dyadische oder tensorielle Produkt bezeichnet in der Mathematik ein spezielles Produkt zweier Vektoren. Als Ergebnis ergibt sich ein Tensor zweiter Stufe mit dem Rang eins. [1]

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \in \mathcal{L}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Laplace Operator

Beim Laplace Operator handelt es sich um einen Differentialoperator in der mehrdimensionalen Analysis. Hauptsächlich findet man ihn in physikalischen Gleichungen, die das Verhalten von physikalischen Feldern beschreiben. [2]

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\Delta \phi = \text{div}(\text{grad } \phi)$$

2.1.3 Nabla Operator

Der Nabla Operator findet in der Vektor- und Tensoranalysis Anwendung. Er wird zur Notation der Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation verwendet. [2]

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2.1.4 Gradient (in kartesischen Koordinaten)

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\phi = \phi(x; y; z)$: Räumliches Skalarfeld

Der Operator *grad* (Nabla-Operator) ist ein Differentialoperator 1. Ordnung. Der Gradient eines räumlichen Skalarfeldes $\phi(x; y; z)$ zeigt in die Richtung des höchsten Anstieges von ϕ . Dabei steht er immer senkrecht zu seinen Niveauflächen.

Der *grad* ϕ ist äquivalent zum Produkt des Nabla-Operators mit dem Skalar ϕ . [2]

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2.1.5 Divergenz (in kartesischen Koordinaten)

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

F_x, F_y, F_z : Skalare Komponenten des Vektorfeldes $\vec{F}(x; y; z)$

Der Operator *div* beschreibt einen Differential Operator erster Ordnung. Der Begriff Divergenz kommt aus der Hydrodynamik und bedeutet „Auseinanderströmen einer Flüssigkeit“. Konkret beschreibt dieser mathematische Operator die Quelledichte in einem Feld. [2] Dabei gilt:

| $\text{div } \vec{F}$ | Bedeutung |
|-----------------------|-----------------------|
| >0 | Quelle in einem Punkt |
| $=0$ | Quellfrei |
| <0 | Senke in einem Punkt |

Tabelle 2 Beschreibung Divergenz in Bezug auf Quelle und Senke

2.1.6 Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

F_x, F_y, F_z : Skalare Komponenten des Vektorfeldes $\vec{F}(x; y; z)$

Der Vektor $\text{rot } \vec{F}$ ist auch als Vektorprodukt des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ mit dem Vektor \vec{F} beschreibbar:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Der Operator *rot* ist ein Differentialoperator 1. Ordnung. Der aus der Hydrodynamik stammende Begriff Rotation beschreibt die Wirbelbildung. Darum bezeichnet man den Vektor $\text{rot } \vec{F}$ als Wirbeldichte oder Wirbelfeld zu \vec{F} . Ein Vektorfeld \vec{F} , dessen Rotation verschwindet, nennt man wirbelfrei. [2]

2.1.7 Gaußscher Integralsatz im Raum

Der Gaußsche Integralsatz im Raum bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen Oberflächen- und Volumenintegral. Er beschreibt den Fluss eines Mediums durch eine geschlossene Oberfläche in Bezug auf ein Volumen- und Flächenintegral. [2]

$$\oiint_{(A)} (\vec{F} * \vec{n}) dA = \oiint_{(A)} (\vec{F} * d\vec{A}) = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{F} dV$$

\vec{n} : Flächennormale

2.1.8 Integralsatz von Stokes

Der Integralsatz von Stokes beschreibt die Transformation von einem Oberflächenintegral in ein Kurven- beziehungsweise ein Linienintegral. [2]

$$\oint_C \vec{F} * d\vec{r} = \iint_{(A)} (\text{rot } \vec{F}) * d\vec{A} = \iint_{(A)} (\text{rot } \vec{F}) * \vec{n} * dA$$

\vec{n} : Flächennormale

2.1.9 Laplace Gleichung

Die Laplace Gleichung beschreibt ein quellen- und wirbelfreies Vektorfeld \vec{F} . [2] Es gilt:

$$\text{div } \vec{F} = 0$$

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

$$\Delta \phi = \vec{\nabla} * \vec{\nabla} * \phi = \text{div}(\text{grad } \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

2.1.10 Poisson Gleichung

Die Poisson Gleichung beschreibt grundsätzlich Randwertprobleme in der Physik, wie zum Beispiel in der Strömungsmechanik und Elektrodynamik. Sie beschreibt eine elliptische partielle Differentialgleichung. Die allgemeine Form lautet:

$$-\Delta u = f$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|------------------|
| u | Gesuchte Lösung |
| Δ | Laplace Operator |
| f | Funktion |

Tabelle 3 Erklärung der Parameter der Poisson Gleichung

Würde für die Funktion $f \equiv 0$ gelten, so würde die entstandene Gleichung die Laplace Gleichung darstellen.

Um die Poisson Gleichung zu lösen, sind weitere Informationen notwendig. Zum Beispiel die Dirichlet-Bedingung:

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. [3]

2.1.11 Zusammenhänge aus der Vektoranalysis

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden verschiedenen Zusammenhänge aus der Vektoranalysis genutzt. [2]

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = \text{div}(\text{grad } \vec{A})$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$$

2.1.12 Drehmatrizen

Eine Drehmatrix ist eine orthogonale, reelle Matrix mit einem Wert für die Determinante gleich eins. Es wird unterschieden zwischen passiver und aktiver Drehung eines Vektors im euklidischen Raum. Bei der passiven Drehung ändert sich der Vektor eigentlich nicht. An sich wird nur das Koordinatensystem verdreht. Es handelt sich um eine Drehung um den Ursprung. Hingegen wird bei der aktiven Drehung der Vektor im bestehenden Koordinatensystem gedreht. Man spricht hier von einer geometrischen Transformation. Hier wird die aktive Drehung, also im mathematisch positiven Sinne betrachtet [4]:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha * \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}$$

2.2 Magnetostatik

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Magnetostatik betrachtet. Dazu werden am Anfang dieses Kapitels kurz auf die Eigenschaften, Wechselwirkungen und Magnetfelder von Permanentmagneten eingegangen. Anschließend werden Magnetfelder, die durch Ströme entstehen dargestellt. Außerdem werden Kraft- und Drehmomentwirkungen in Magnetfeldern betrachtet. Abschließend wird die Thematik der Ummagnetisierung in ferro- und diamagnetischen Stoffen behandelt.

2.2.1 Grundlagen, Ampere'sches Gesetz und Quelfreiheit

Grundsätzlich stoßen sich gleichnamige Pole ab und ungleichnamige Pole ziehen sich an. Die Kraftwirkung wird mit Hilfe von Magnetfeldern beschrieben. Durch Magnetfeldlinien werden die Felder visualisiert und greifbarer.

Die Pole werden mit Nord- und Südpol definiert. In Kompassen werden Magnetnadeln verwendet. Die Spitze, die zum geographischen Nordpol zeigt, wird als magnetischer Nordpol bezeichnet. Die gleiche Definition gilt für den Südpol. Jedoch findet diese Festlegung keine Zweckmäßigkeit.

Die Magnetostatik zieht in vielen Dingen Analogien zur Elektrostatik. Allerdings treten in der Elektrostatik Ladungen getrennt auf. Hingegen existieren in der Magnetostatik nur Dipole. Bis jetzt sind keine magnetischen Monopole entdeckt worden.

Jedoch erzeugen stromdurchflossene Leiter einen magnetischen Feldwirbel. Dies zeigt den Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Phänomenen. So stimmt das Magnetfeld einer Spule nahezu mit einem Permanentmagneten überein.

Die Beschreibung der Magnetfelder erfolgt mit der magnetischen Flussdichte \vec{B} . Diese kann im Umfeld eines stromdurchflossenen Leiter wie folgt beschrieben werden:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} * \frac{I}{r}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|---|
| \vec{B} | Magnetische Flussdichte [$T = \frac{Vs}{m^2}$] |
| μ_0 | Magnetische Permeabilität ($4 * \pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$) |
| I | Strom durch Leiter [A] |
| r | Radius (Distanz von Leitermittelpunkt zu berechnenden Punkt) |

Tabelle 4 Erklärung der Parameter zur magnetischen Flussdichte um stromdurchflossenen Leiter

In dieser Formel wird deutlich, dass das B-Feld proportional zum Strom und indirekt proportional zum Abstand r ist.

Analog zur elektrischen Spannung definiert sich die magnetische Spannung über folgenden Ausdruck:

$$U_m = \frac{1}{\mu_0} \int_{P_1}^{P_2} \vec{B} * d\vec{r}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|---|
| \vec{B} | Magnetische Flussdichte [$T = \frac{Vs}{m^2}$] |
| μ_0 | Magnetische Permeabilität ($4 * \pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$) |
| P_1 | Aufpunkt des betrachtenden Integrals |
| P_2 | Endpunkt des betrachtenden Integrals |
| $d\vec{r}$ | Integrationsweg |
| U_m | Magnetische Spannung in [A] |

Tabelle 5 Erklärung der Parameter zur magnetischen Spannung

Nach dem Ampere'schen Gesetz gilt:

$$U_m = I$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|-----------------------------|
| U_m | Magnetische Spannung in [A] |
| I | Strom in [A] |

Tabelle 6 Parameter zur Erklärung des Ampere'schen Gesetz

Das Ampere'sche Gesetz sagt aus, dass die treibende Kraft für ein Magnetfeld der elektrische Strom entlang einer geschlossenen Kurve ist.

Durch Umformung und Einsetzen der vorhergehenden Zusammenhänge ergibt sich dann die Maxwellgleichung:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 * \vec{j}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|---|
| \vec{B} | Magnetische Flussdichte [$T = \frac{Vs}{m^2}$] |
| μ_0 | Magnetische Permeabilität ($4 * \pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$) |
| \vec{j} | Stromdichte in [$\frac{A}{m^2}$] |
| rot | Rotation |

Tabelle 7 Parameter zur Erklärung der Maxwellgleichung – Durchflutungsgesetz für statische Felder

Diese Gleichung beschreibt die Wirbeldichte als Produkt der Stromdichte \vec{j} und der magnetischen Permeabilität μ_0 .

Analog zum elektrischen Fluss definiert sich der magnetische Fluss, wie folgt:

$$\Phi_m = \iint_A \vec{B} * d\vec{f}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|--|
| \vec{B} | Magnetische Flussdichte [$T = \frac{Vs}{m^2}$] |
| Φ_m | Magnetischer Fluss [$Wb = Vs$] |

Tabelle 8 Parameter zur Erklärung der Definition des magnetischen Flusses

Wie bereits erwähnt treten im Magnetismus keine Monopole auf. Das heißt konkret, dass keine offenen Feldlinien in Magnetfeldern auftreten. Der magnetische Fluss, der über eine Oberfläche des betrachtenden Volumens austritt, tritt auch wieder ein. Daraus ergibt sich für die Quelledichte folgende Maxwell Gleichung:

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|--|
| \vec{B} | Magnetische Flussdichte [$T = \frac{Vs}{m^2}$] |
| div | Divergenz |

Tabelle 9 Erklärung der Parameter der Maxwell Gleichung - Gaußsches Gesetz

Dieser Ausdruck besagt, dass alle Magnetfelder im Gegensatz zu elektrischen Feldern quellfrei sind.

Durch Lösung der Maxwell Gleichungen können magnetostatische B-Felder für verschiedene Stromverteilungen berechnet werden. Allgemein ist es sinnvoll, dazu ähnlich wie in der Elektrostatik ein Potential einzuführen. In elektrischen Feldern beschreibt das elektrische Potenzial ϕ die potenzielle Energie. Im Falle der Magnetostatik ist eine ähnliche Definition nicht möglich, da es keine konservativen Felder gibt.

$$\oint \vec{B} * d\vec{r} \neq 0$$

$$\vec{B} \neq \text{rot} \vec{A}$$

Das heißt, es kann keine Analogie zum elektrostatischen Feld gezogen werden. Die Darstellung des Potentials über ein Skalarfeld ist nicht möglich. Jedoch kann auf Grundlage der Maxwell Gleichung folgender Ansatz gewählt werden.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &\equiv 0 \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \end{aligned}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|---|
| \vec{B} | Magnetische Flussdichte $\left[T = \frac{Vs}{m^2} \right]$ |
| rot | Rotation |
| \vec{A} | Vektorpotenzial in $\left[\frac{Vs}{m} \right]$ |

Tabelle 10 Erklärung Parameter zur Definition des Vektorpotenzials

Bei einem bestehenden B-Feld ist das Vektorpotenzial nicht eindeutig bestimmbar. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\vec{A} = \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f(\vec{r}) + \operatorname{const}$$

Dies bedeutet, dass bei der Wahl des Vektorpotenzials große Freiheiten bestehen. Jedoch kann das Vektorpotenzial so bestimmt werden, dass noch zusätzliche Bedingung erfüllt werden. Dies bezieht sich auf Eichbedingungen. Häufig wird hier die sogenannte Coulomb-Eichung angewandt.

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Durch Einsetzen des zuvor genannten Ansatzes in die Maxwell Gleichung geht folgender Zusammenhang hervor [5].

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \\ \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \Delta \vec{A} &= 0 \end{aligned}$$

2.2.2 Grundlagen Biot-Savart'sches Gesetz

Das Biot-Savart'sche Gesetz beschreibt die Berechnung der magnetischen Flussdichte an einem Punkt in der Umgebung eines gleichstromdurchflossenen Leiters.

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_r \mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|---|
| $B(\vec{r})$ | Magnetische Flussdichte in Abhängigkeit von \vec{r} |
| μ_0 | Magnetische Permeabilität $(4 * \pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am})$ |
| μ_r | Relative magnetische Permeabilität |
| $d\vec{s}'$ | Wegelement zeigt in Richtung des Strompfades |
| \vec{r} | Aufpunktvektor: gibt den Punkt an, an dem die magnetische Flussdichte berechnet werden soll |
| \vec{r}' | Quellpunktvektor: zeigt während der Integration stets zu dem Ort des Strompfades |

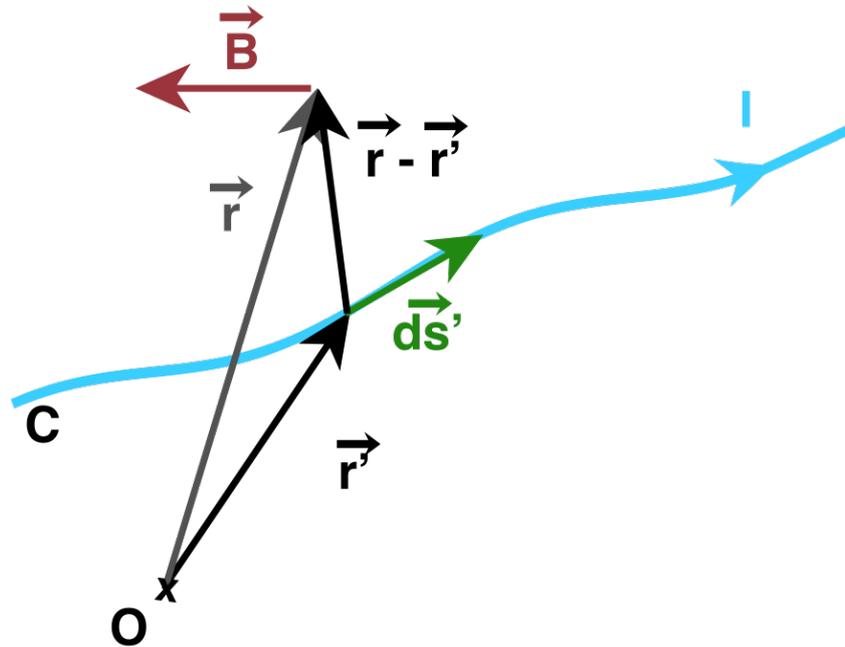


Abbildung 5 Biot-Savart'sche Gesetz - grundlegende Anwendung

Der Strom I folgt dem Weg C . Auf dieser Strecke muss das Integral berechnet werden. Das infinitesimal kleine Wegelement $d\vec{s}'$ zeigt die Stromflussrichtung an. Der Aufpunktvektor \vec{r} beschreibt die Koordinaten des Punktes, an dem die magnetische Flussdichte berechnet wird. Im Gegensatz dazu zeigt der Quellvektor \vec{r}' auf den Ort des zu betrachtenden Stromflusses. Das Gesetz von Biot-Savart betrachtet nur den Differenzvektor $\vec{r} - \vec{r}'$. Somit ist die Wahl des Ursprungs nicht ausschlaggebend für das Ergebnis. [6]

2.2.3 Feld eines Dipols ohne Berücksichtigung der Geometrie

Ein magnetischer Dipol kann näherungsweise mit einem elektrischen Dipol beschrieben werden. [7] Auf die Herleitung wird in dieser Arbeit nicht genauer eingegangen.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{3\vec{r}(\vec{m} * \vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^3}$$

2.2.4 Feld eines Dipols unter Berücksichtigung der Geometrie (Zylinder)

Magnetische Effekte von Dauermagneten basieren auf den Elektronenspins und deren magnetische Momente. In Spulen wird der Magnetismus eigentlich durch elektrochemische Prozesse hervorgerufen. Ausgehend von diesen Grundlagen wird das Verhalten von Magnetfeldern in den Rahmen von Maxwell angepasst.

Am Anfang der Herleitung steht die Magnetisierung \vec{M} . Sie ist das Gegenstück zur Polarisation \vec{P} in der Elektrostatik.

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} + \vec{M}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|--|
| \vec{H} | Magnetische Feldstärke $\left[\frac{A}{m}\right]$ |
| \vec{B} | Magnetische Flussdichte $\left[T = \frac{Vs}{m^2}\right]$ |
| \vec{M} | Magnetisierung in $\left[\frac{A}{m}\right]$ |
| μ_0 | Magnetische Permeabilität $\left(4 * \pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am}\right)$ |

Tabelle 11 Erklärung Parameter für den Zusammenhang der magnetischen Flussdichte, magnetischen Feldstärke und Magnetisierung

Die Magnetisierung beschreibt die Anregung durch das Material. Außerdem beschreibt sie die Summe aller elementaren, magnetischen Momente, die sich in der Volumeinheit des betrachtenden Körpers befinden. Mit Anwendung der Maxwellgleichungen auf die magnetische Flussdichte und der magnetischen Feldstärke als Hilfsgröße, wird die Verteilung der Magnetisierung in Körpern betrachtet.

Das Feld der magnetischen Flussdichte ist im Gegensatz zur magnetischen Feldstärke quellfrei. Im Magneten ist das H-Feld zum B-Feld parallel, jedoch entgegengerichtet.

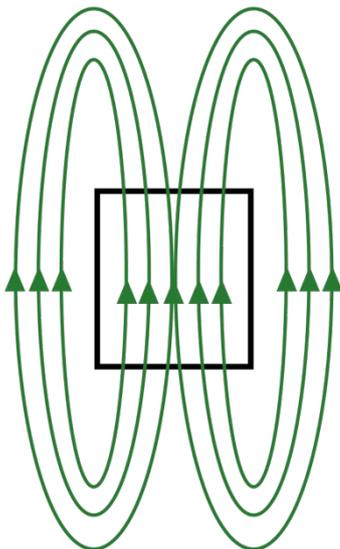


Abbildung 6 H-Feld eines Permanentmagneten

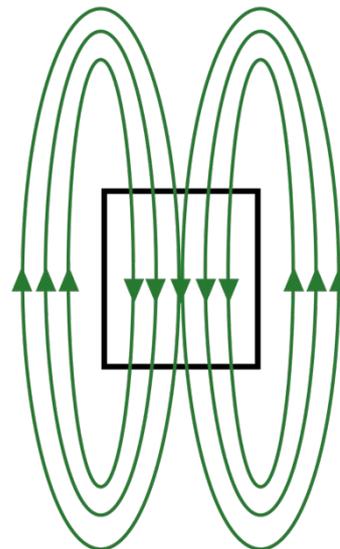


Abbildung 7 B-Feld eines Permanentmagneten

Wendet man die Divergenz auf folgenden Ausdruck an kommt man auf das Ergebnis:

$$\vec{B} = \mu_0 * (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} (\mu_0(\vec{H} + \vec{M}))$$

Nach der Maxwell Gleichung – Gaußsches Gesetz gilt:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Daraus folgt:

$$0 = \mu_0 * \operatorname{div} (\vec{H} + \vec{M})$$

$$0 = \operatorname{div} (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{M}$$

Für die magnetische Feldstärke gilt:

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \psi$$

Eingesetzt in die obere Formel ergibt sich:

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{M}$$

$$\operatorname{div} (-\operatorname{grad} \psi) = -\operatorname{div} \vec{M}$$

$$\Delta \psi = \operatorname{div} \vec{M}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|---|
| \vec{H} | Magnetische Feldstärke $\left[\frac{A}{m}\right]$ |
| ψ | Skalares magnetisches Potenzial in [A] |
| \vec{M} | Magnetisierung in $\left[\frac{A}{m}\right]$ |
| μ_0 | Magnetische Permeabilität $(4 * \pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am})$ |
| \vec{B} | Magnetische Flussdichte $\left[T = \frac{Vs}{m^2}\right]$ |

Tabelle 12 Erklärung Parameter für den Zusammenhang zwischen Magnetisierung und skalarem magnetischen Potenzial

Auf den Poloberflächen des Magneten herrschte eine Unstetigkeit der Magnetisierung. Für den Zusammenhang wird folgende Bedingung gesetzt, sodass anstatt

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

gilt:

$$\vec{B}_n + \vec{B}_{n'} = 0$$

Der Index n und n' bezeichnen dazu die Normalenvektoren auf die unstetigen Oberflächen. n' symbolisiert dabei die entgegengesetzte Richtung.

In der Umgebung des magnetischen Körpers gilt für die Magnetisierung:

$$\vec{M} = 0$$

Im Körper springt dann die Magnetisierung auf ihren Betrag:

$$\vec{B}_n + \vec{B}_{n'} = -\vec{M}_n$$

Für die Oberfläche gilt nun:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial n'} = \vec{M}_n$$

Außerdem wird angenommen, dass im unendlichen Raum das skalare Potenzial verschwindet.

$$\psi = 0$$

Im Grunde geht es um keine Randwertbetrachtung, sondern um eine grundlegende Summation.

$$4\pi\psi = - \int \frac{\operatorname{div} \vec{M}}{\vec{r}} dr - \int \frac{M_n}{\vec{r}} d\sigma$$

Der erste Integrand beschreibt die Ladungsdichte ρ_m des Volumens; der zweite Teil die Flächenladungsdichte ω_m . Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten einen magnetischen Körper zu betrachten. Entweder mit einer homogenen oder mit einer inhomogenen Magnetisierung des Volumens. Bei der Inhomogenen nimmt man an, dass an den Polflächen die Magnetisierung null ist und dabei der Betrag zum Mittelpunkt parabelförmig ansteigt. In dieser Arbeit wird die Magnetisierung als gleichmäßig verteilt angenommen. So werden nur die Polflächen betrachtet und der erste Integrand fällt weg. Die Magnetisierung wird als gleichmäßige Verteilung über die Polflächen angenommen. So ergibt sich:

$$\pm P = \pm M * F$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|-----------------------------|
| P | Komplette Stärke des Pols |
| M | Magnetisierung |
| F | Querschnittsfläche des Pols |

Tabelle 13 Erklärung der Parameter zum Zusammenhang zwischen Polstärke und Magnetisierung in Bezug auf die Querschnittsfläche

Folgender Zusammenhang soll zur magnetischen Feldstärke beziehungsweise zur magnetischen Flussdichte in Abhängigkeit vom Ort führen. [7]

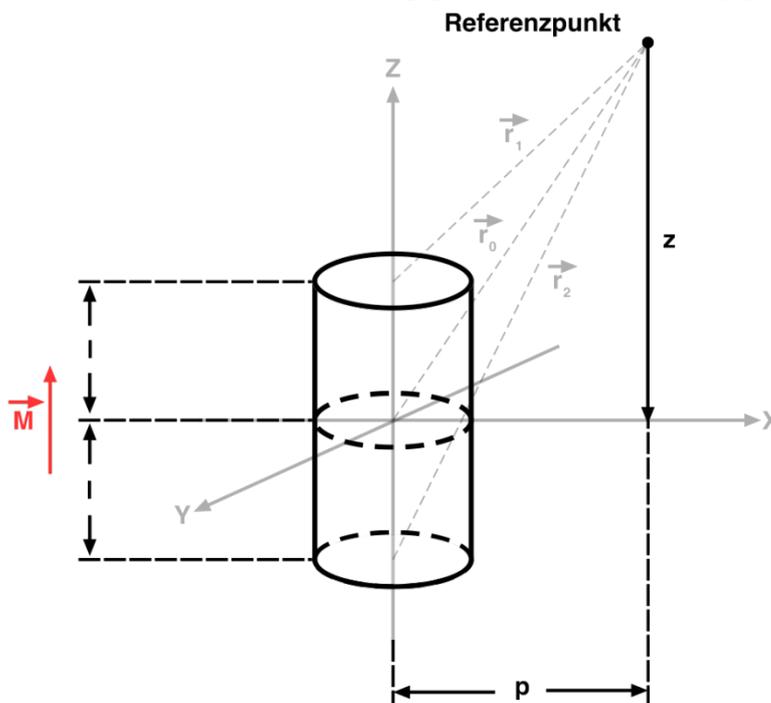


Abbildung 8 Darstellung der Vektoren am Stabmagneten

$$4 * \pi * \psi = -M * F * \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Mit:

$$r_1^2 = (z - l)^2 + p^2$$

$$r_2^2 = (z + l)^2 + p^2$$

Reihenentwicklung führt zu:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0} * \left(1 + \frac{1}{2} * \frac{2 * z * l + l^2}{r_0^2} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_0} * \left(1 - \frac{1}{2} * \frac{2 * z * l + l^2}{r_0^2} + \dots \right)$$

Mit Zusammenhang:

$$r_0 = \sqrt{z^2 + p^2}$$

$$4 * \pi * \psi = -2 * l * P * \frac{z}{r_0^3} = 2 * l * P * \frac{\delta}{\delta z} * \frac{1}{r_0}$$

Wie zu erwarten war, entspricht die äußere magnetische Flussdichte für Abstände $\gg 2 * l$, die eines Dipols. Dieselbe Darstellung gilt für das innere des Magneten. Im folgenden Diagramm ist die magnetische Flussdichte beziehungsweise Magnetisierung eines Stabmagneten über seine Rotationsachse im Inneren und im Äußeren des Dipols dargestellt.

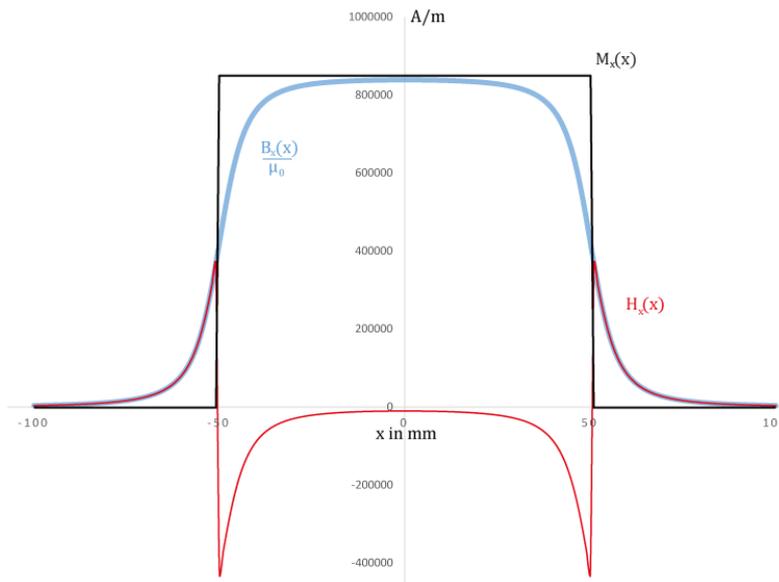


Abbildung 9 Magnetische Flussdichte entlang der Symmetrieachse eines Zylinderpermanenmagneten [8]

Für eine weitere Betrachtung werden folgende Variablen eingeführt.

Formelzeichen Erklärung

a Radius der Polfläche

ρ Abstand des Integrationspunkt zum Mittelpunkt der Polfläche

Tabelle 14 Parameter zur Beschreibung eines Dipols über die Polfläche und Abstand zum Integrationspunkt

$$4 * \pi * \psi = 2 * \pi * M * \left(\int_0^a \frac{\rho * d\rho}{r_1} - \int_0^a \frac{\rho * d\rho}{r_2} \right)$$

Mit:

$$r_1^2 = (l - z)^2 + \rho^2$$

$$r_2^2 = (l + z)^2 + \rho^2$$

Die Betrachtung für $0 \leq |z| \leq l$ führt zu:

$$\psi = \frac{M}{2} * \left[\left\{ (l - z)^2 + a^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ (l + z)^2 + a^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 2z \right]$$

$$H = -\frac{d\psi}{dz} = \frac{M}{2} * \left[\frac{l - z}{\left\{ (l - z)^2 + a^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{l + z}{\left\{ (l + z)^2 + a^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} - 2 \right]$$

Für den Fall, dass l um einige Male größer ist als a wird angenommen:

Für $z = 0$ gilt:

$$H \sim 0; \frac{\delta H}{\delta z} \sim 0$$

Für $z = \pm l$ gilt:

$$H = -\frac{M}{2}; \frac{\delta H}{\delta z} = \mp \frac{M}{2} * \frac{1}{a}$$

Wie die vorhergehende Abbildung zeigt, existiert an den Polflächen ein plötzlicher Vorzeichenwechsel. Des Weiteren nähert sich der Betrag der Feldstärke in der Mitte des Zylinders einem konstanten Wert. Außerdem wird die Feldstärke H als Hilfsgröße angesehen. Sie wird als entgegengesetzt zur magnetischen Flussdichte B und Magnetisierung M angenommen. In der theoretischen Physik gibt es weitere Ansätze zur Beschreibung von Feldberechnungen von Permanentmagneten. Auf diese wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. [7]

2.2.5 Kräfte und Drehmomente auf einen magnetischen Dipol im äußeren Feld

Die magnetische Kraft, die auf einen Dipol in einem äußeren Feld wirkt, berechnet sich aus dem dyadischen Produkt aus der magnetischen Flussdichte des äußeren Feldes \vec{B}_1 mit dem Nablaoperator $\vec{\nabla}$ und Multiplikation mit dem magnetischen Dipolmoment \vec{m} . Anschaulich beschreibt das erste Produkt die Änderung der magnetischen Flussdichte im dreidimensionalen Feld. Anschließend wird die erzeugte Matrix mit dem magnetischen Dipolmoment \vec{m} multipliziert. [8]

$$\vec{F} = (\vec{B}_1 \otimes \vec{\nabla}) * \vec{m}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} * \vec{m}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vec{m}_x \\ \vec{m}_y \\ \vec{m}_z \end{bmatrix}$$

In einem magnetischen äußeren Feld wirkt auf einen Dipol ein Drehmoment, das durch das Kreuzprodukt aus der äußeren magnetischen Flussdichte und dem magnetischen Dipolmoment berechnet werden kann. [8]

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_y * B_z - m_z * B_y \\ m_z * B_x - m_x * B_z \\ m_x * B_y - m_y * B_x \end{bmatrix}$$

Die potentielle Energie eines Dipols in einem Magnetfeld kann durch das Skalarprodukt mit dem nachfolgendem Ausdruck kalkuliert werden. [8]

$$E_{pot} = -\vec{m} * \vec{B}$$

2.2.6 Zeitkonstante einer Spule

Die Zeitkonstante einer Spule beschreibt das Verhalten einer Spule in Bezug auf ihre Induktivität und ihren ohmschen Widerstand. In folgenden Diagrammen werden Ein- und Ausschaltvorgänge in einfachen Schaltungen dargestellt. Als charakteristische Größe einer Spule gilt die Zeitkonstante T . Mit dieser wird der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung in Bezug auf die Zeit beschrieben. [9]

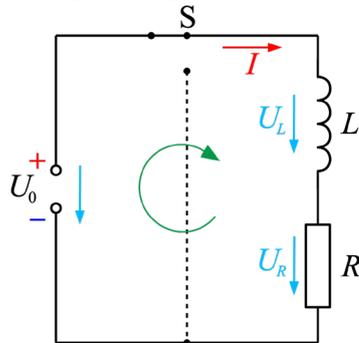


Abbildung 10 Schaltplan zum Einschaltvorgang einer Spule [1]

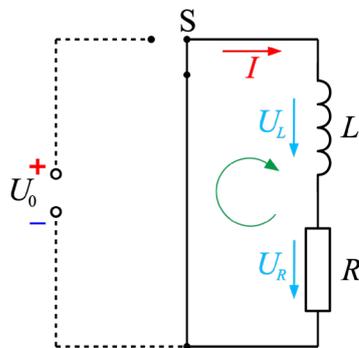


Abbildung 11 Schaltplan zum Kurzschluss einer Spule [1]

Zeitkonstante Tau

$$T = \frac{L}{R}$$

Einschaltvorgang

$$u_L = U_0 * e^{(-\frac{t}{T})}$$

$$i_L = \frac{U_0}{R} * \left[1 - e^{(-\frac{t}{T})} \right]$$

Kurzschluss- und Entladevorgang

$$u_L = -U_0 * e^{(-\frac{t}{T})}$$

$$i_L = \frac{U_0}{R} * \left[e^{(-\frac{t}{T})} \right]$$

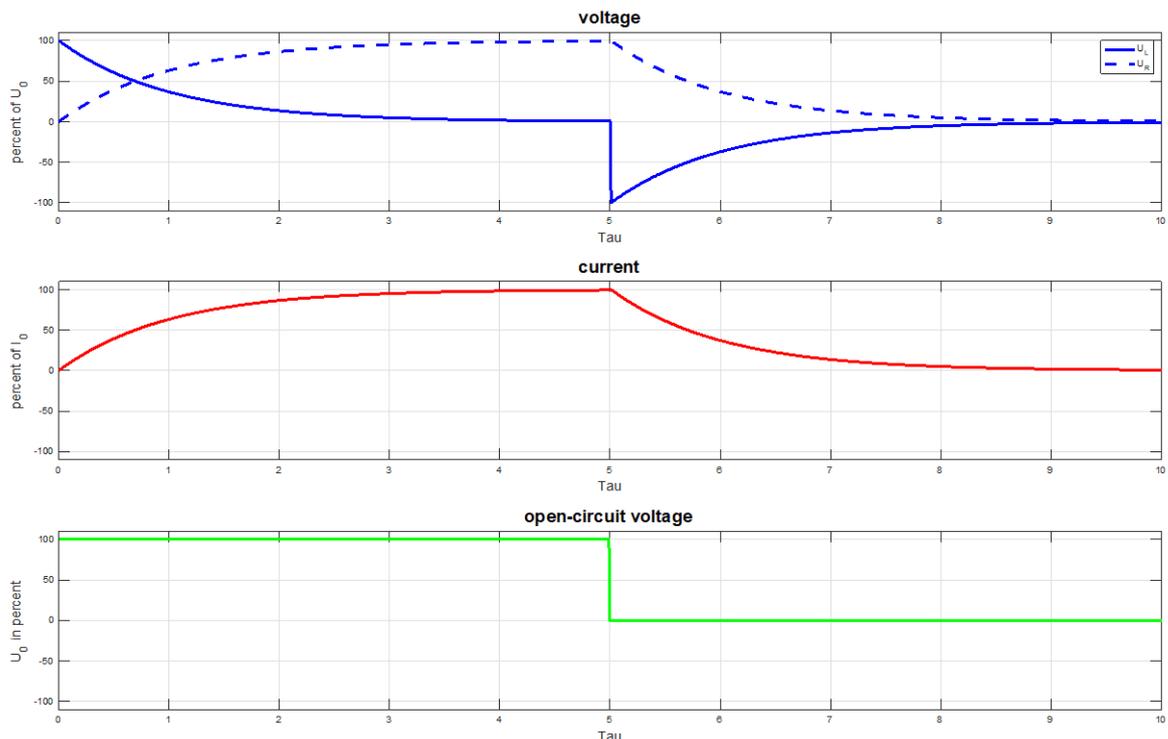


Abbildung 12 Theoretischer Lade- und Entladevorgang einer Spule in Bezug auf die Zeitkonstante [10]

2.2.7 Materialgesetze im stationären Feld

2.2.7.1 Dia- und Paramagnetismus

Grundsätzlich beeinflusst ein magnetisches Feld alle Stoffe. Mittels des Zusammenhangs der krafterzeugenden magnetischen Flussdichte B und der magnetischen Erregungsgröße H lässt sich der Zusammenhang ausdrücken. Unter bestimmten Voraussetzungen sind das H - und B -Feld zueinander proportional mit Hilfe eines Faktors darstellbar. Dieser materialabhängige Faktor wird mit μ abgekürzt. Er ist wie folgt definiert:

$$\mu = \mu_0 * \mu_r$$

Dabei beschreibt μ_0 ($4 * \pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$) den leeren Raum und die relative Permeabilität μ_r als einheitsloser Faktor die Materialeigenschaften des betrachteten Stoffes.

Aufgrund der Bahn- und Spinnmomente im Inneren der Atome verhalten sich Materialien unterschiedlich.

Als diamagnetische Stoffe bezeichnet man Materialien, die das Feld der magnetischen Flussdichte schwächen. Es gilt:

$$B < \mu_0 H \text{ oder } \mu_r < 1$$

Unterstützt ein Stoff die magnetische Flussdichte wird er als paramagnetischer Stoff bezeichnet. Hier gilt:

$$B > \mu_0 H \text{ oder } \mu_r > 1$$

Falls μ_r erheblich größer als eins ist, werden diese Materialien auch als ferromagnetisch bezeichnet. [13]

2.2.7.2 Ferromagnetismus

Bei ferromagnetischen Materialien verhält sich die magnetische Flussdichte nicht proportional zur magnetischen Feldstärke. Sie ist von der „Herstellungsweise“ des betreffenden H-Werts abhängig. Veranschaulicht wird dieser Zusammenhang von sogenannten Magnetisierungskurven.

Befindet sich ein ferromagnetischer Stoff in einem äußeren Magnetfeld, das man ständig erhöht, steigt die magnetische Flussdichte beziehungsweise die Magnetisierung entsprechend ihrer materialspezifischen Kurve an. Diese wird auch Neukurve genannt (OA). Wird das Magnetfeld schwächer, so fällt das B-Feld nicht genau so schnell, wie es angestiegen ist, ab. Ist die magnetische Feldstärke verschwunden, so bleibt eine restliche magnetische Flussdichte erhalten. Diese wird auch als Remanenzflussdichte B_r bezeichnet. Um die restliche magnetische Flussdichte verschwinden zu lassen, muss die Erregung definiert in gegengesetzte Richtung stattfinden (OF). Dieser Effekt wird auch als Hysterese bezeichnet. [13]

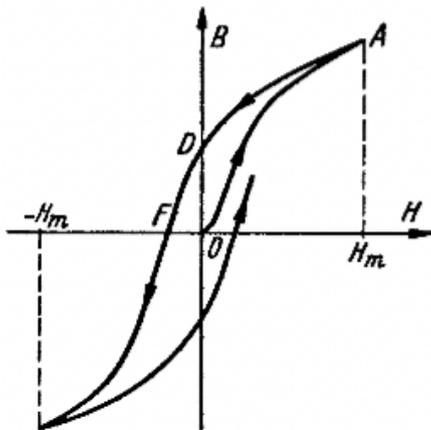


Abbildung 13 Magnetisierungskurve [13]

2.2.8 Theorem von Earnshaw

Das Theorem von Earnshaw beschreibt das Verhalten eines Probekörpers auf den eine Kraft oder auch ein Kraftfeld, das umgekehrt proportional zum Quadrat des Ortsvektors ist, wirkt. Es besagt, dass es nicht möglich ist, einen Körper mit sechs Freiheitsgraden mit Hilfe von magnetischen Kräften frei und ohne äußere Beeinflussung stabil schweben zu lassen.

Soll ein Probekörper in einem Feld eine stabile Gleichgewichtslage einnehmen, muss an diesem Punkt ein Minimum des Potentials herrschen. Beim Auslenken des Körpers wird Arbeit verrichtet. Um den Körper wieder in seinen stabilen Punkt zurückzutreiben, ist eine rücktreibende Kraft notwendig.

Aus der ersten Maxwell-Gleichung geht hervor, dass in quellfreien und anderen $\frac{1}{r^2}$ -Feldern die Divergenz gleich 0 ist.

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

In quellfreien Feldern gibt es bestenfalls Sattelpunkte. Dies hat zur Folge, dass mindestens in eine Richtung keine rücktreibende Kraft auftritt. Falls der Körper in diese Richtung ausgelenkt wird, wird er nicht mehr von selbst zu seinem Minimum zurückkehren. Ein einfaches Beispiel für ein Potential, das in alle drei Raumrichtungen anziehend ist, ist folgender Ausdruck. Falls alle drei Raumrichtungen anziehend sind, muss gelten:

$$a, b, c > 0$$

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2$$

Für $a = 4$, $b = 4$ und $c = 4$ ergibt sich in einer Höhe von 10 mm folgendes Beispiepotential. Hier wird klar, dass diese Parametervorgabe ein eindeutiges Minimum in den drei Richtungen erzeugt.

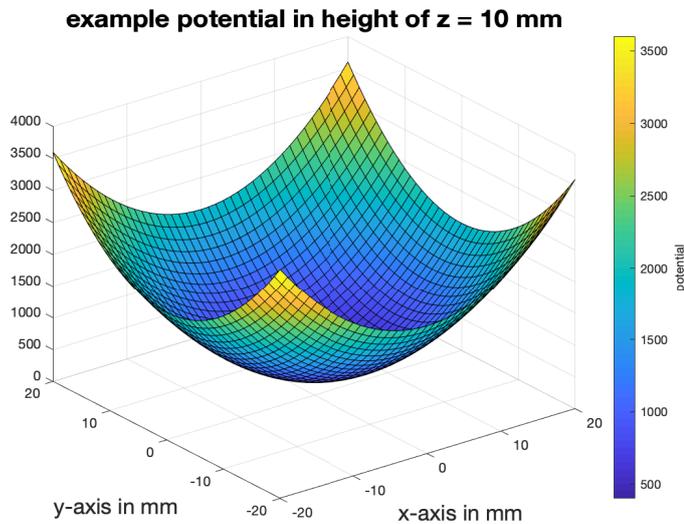


Abbildung 14 Beispiel Potential mit Minimum in drei Richtungen

Setzt man die Gleichung in die Laplacegleichung ein, so ergibt sich folgender Ausdruck:

$$a + b + c = 0$$

Damit diese Gleichung erfüllt sein kann, muss eine der Konstanten kleiner Null sein. Damit widerspricht sich jedoch die Aussage, dass es ein Potential gibt, das in alle drei Richtungen anziehend ist.

Für $a = -8$, $b = 4$ und $c = 4$ ergibt sich ein Potential mit einem Sattelpunkt, sodass der angenommene Probekörper in x-Richtung stabil, jedoch in y-Richtung instabil wäre.

[11]

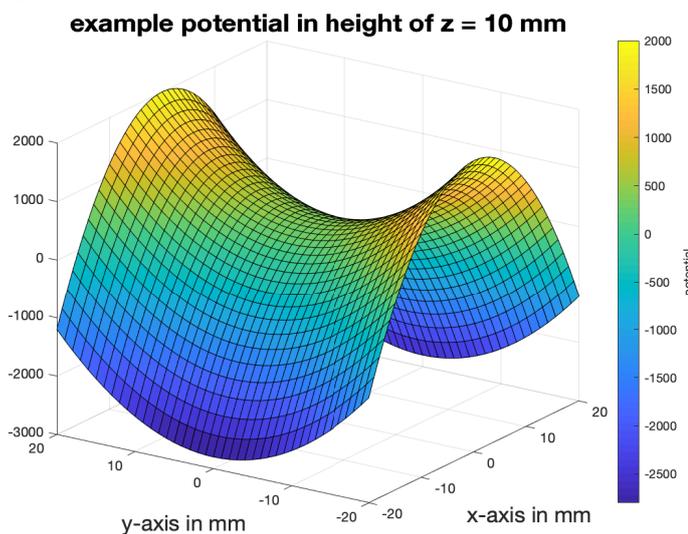


Abbildung 15 Beispiel Potential mit Sattelpunkt

Dieses Phänomen tritt auch bei Dauermagneten auf. Das heißt, ein Permanentmagnet kann nicht über einen anderen schweben, außer es kommen dynamische Felder beziehungsweise geregelte Spulen zum Einsatz.

3 Eingeschlagener Realisierungsweg

3.1 Darstellung der behandelten Aspekte

Diese Arbeit wird hier in drei Felder aufgeteilt. Als erstes werden die physikalischen magnetischen Gesetzmäßigkeiten anhand von Experimenten und durch Vergleich mit reellen Messdaten dargestellt. Aus diesen physikalischen Modellen wird dann im zweiten Schritt ein einfacher Magnetschwebeversuch in der Simulation dargestellt. Dazu wird ein Ansatz zur Realisierung des Versuchsaufbaus beschrieben. Im letzten Teil wird ein Simulationsmodell dargestellt, das die Kraft- und Momentenwirkung auf einen Dipol in einem von Spulen und einem Ringmagneten erzeugten Feld darstellt. Aus dieser Simulation werden verschiedene Problematiken erkannt und beschrieben. Diese sollen helfen, die Entwicklung des Plattformschwebeversuchs weiter voranzubringen.

3.1.1 Verifizierung der physikalischen Modelle

Es werden verschiedenen physikalische Modelle und deren Implementierung überprüft beziehungsweise bewertet:

1. Dynamisches Verhalten einer Spule
2. Feld einer mit Gleichstrom durchflossenen Spule
3. Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte vom Strom in Bezug auf eine mit Gleichstrom durchflossene Spule
4. Feld eines magnetischen Dipols in zwei Ansätzen
5. Kraftwirkung auf einen Dipol in einem äußeren magnetischen Feld
6. Diskrete Betrachtung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten

3.1.2 Simulation des umgekehrten Magnetschwebeversuchs

Als vereinfachte Grundlage des komplexen Magnetschwebeversuchs wird in dieser Arbeit ein elementarer Versuchsaufbau simuliert. Hierbei werden die meisten nötigen physikalischen Grundlagen verwendet, die für das komplexere System notwendig sind. Dabei wird das Verhalten der Magnetfelder vereinfacht dargestellt. In dieser Simulation soll durch eine aufgehängte Spule ein Magnet, wie in der folgenden Schemazeichnung dargestellt ist, zum Schweben gebracht werden. An den Stirnseiten der Spule werden Hallensensoren positioniert. Durch diese Messungen kann die Position des Magneten bestimmt und geregelt werden.

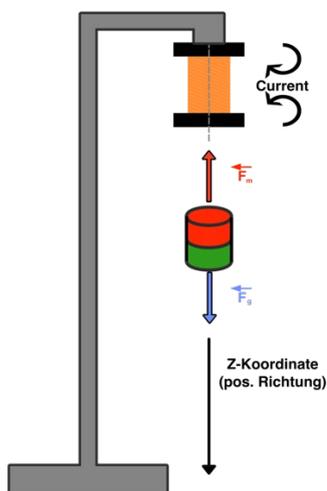


Abbildung 16 Versuchsaufbau elementarer Magnetschwebeversuch

3.1.3 Simulation von Kraft- und Momentwirkung auf einen Dipol in einem von Spulen und einem Ringmagneten erzeugten äußeren Feld

Die in der vorherigen Simulation angewandten physikalischen Gesetzmäßigkeiten sollen in diesem Modell in komplexerer Weise das Verhalten des Plattformschweberversuchs darstellen. Hier werden Momente und Kräfte, die auf einen Dipol wirken sollen, vorgegeben. Anhand von diesen Ausgangsparametern wird der benötigte Strom für jede Spule berechnet. Mit den berechneten Stromstärken kann das Feld an den ausschlaggebenden Punkten wieder berechnet werden. Daraus wird dann wieder die Kraft- und Momentenwirkung auf den Dipol im äußeren Feld simuliert. Außerdem ist der Aufbau durch verschiedene Variablen individuell parametrierbar. Dabei entstehen aber einige Probleme, die in Zukunft gelöst werden müssen.

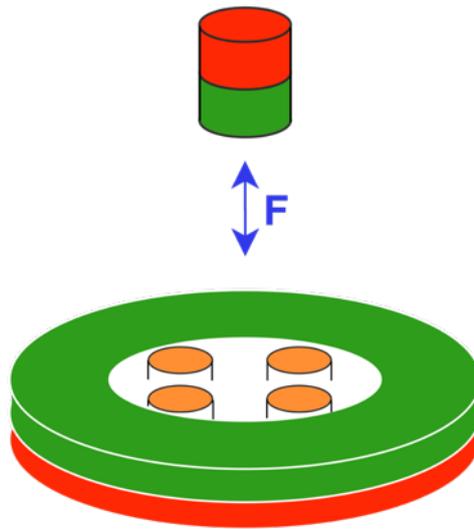


Abbildung 17 Schematischer Versuchsaufbau zum Plattformschweberversuch

3.2 Experimenteller Abgleich der physikalischen Modelle

Um definierte Aussagen über die Übereinstimmung von physikalischen Modellen und der Realität zu treffen, wurden verschiedene Versuche durchgeführt. Anschließend werden diese in diesem Abschnitt evaluiert.

3.2.1 Physikalische Modelle der Spule

Als reale Spule wurde eine handelsübliche Spule, die normal für den Audiobereich eingesetzt wird, betrachtet. Sie besitzt einen herausnehmbaren Ferritkern. So kann das Verhalten der Spule auch ohne Kern betrachtet werden.

| Spulenparameter | Größe |
|-------------------------|--------------|
| Induktivität | 4,7 mH |
| Layer | 8 |
| Drahtdurchmesser | 0,5 mm |
| Anzahl Windungen | 400 |
| Material | Kupfer |
| Elektrischer Widerstand | 2,2 Ω |
| Höhe | 22,5 mm |
| Innerer Durchmesser | 13 mm |
| Äußerer Durchmesser | 22,5 mm |
| Kerndurchmesser | 10 mm |
| Kernhöhe | 25 mm |

Tabelle 15 Kenndaten der betrachteten Spule (VISATON VIS SP 3808)

3.2.1.1 Zeitkonstante der Spule

Die Zeitkonstante T lässt sich mit Hilfe folgender Formel berechnen.

$$T = \frac{L}{R} = \frac{4,7 \text{ mH}}{2,2 \Omega} = 0,0021 \text{ sec}$$

Anhand der in den Grundlagen erläuterten Zusammenhänge von Strom und Spannung lässt sich auf den idealen Verlauf der elektrischen Größen beim Ein- und Ausschaltvorgang schließen.

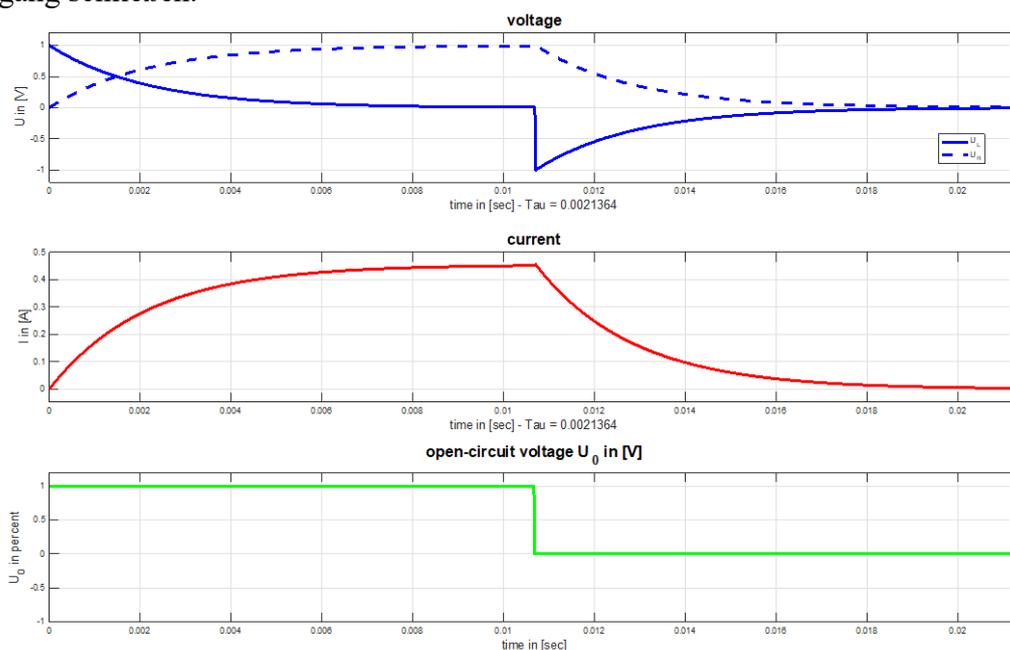


Abbildung 18 Einschalt- und Ausschaltvorgang Spule (L = 4,7 mH)

Zudem wurden diese Annahmen praktisch überprüft. Die Spule wurde an ein Labornetzgerät angeschlossen und über ein digitales Oszilloskop wurde die abfallende Spannung an der Spule gemessen. Da die Spannungsquelle aber einen lastabhängigen Innenwiderstand besitzt, können die idealen und realen Spannungskurven nicht gleich sein. Der ohmsche Widerstand der Spule und des Netzgerätes sind in Reihe geschaltet. Dadurch addieren sich diese und die Zeitkonstante wird merklich kleiner. Da die betrachtete Spule nur einen ohmschen Widerstand von $2,2 \Omega$ besitzt, trägt der Innenwiderstand des Labornetzgeräts zur Dynamik der Spule signifikant bei. Dieser Zusammenhang erschließt sich aus folgenden Ausdrücken:

Zeitkonstante Tau

$$T = \frac{L}{R}$$

Einschaltvorgang

$$u_L = U_0 * e^{\left(-\frac{t}{T}\right)}$$

$$i_L = \frac{U_0}{R} * \left[1 - e^{\left(-\frac{t}{T}\right)}\right]$$

Entladevorgang

$$u_L = -U_0 * e^{\left(-\frac{t}{T}\right)}$$

$$i_L = \frac{U_0}{R} * \left[e^{\left(-\frac{t}{T}\right)}\right]$$

Da die Beschaltungen im zukünftigen Aufbau noch nicht bekannt ist und diese Zusammenhänge zu den Grundlagen der Elektrotechnik gehören, wurde auf weiter Untersuchungen verzichtet.

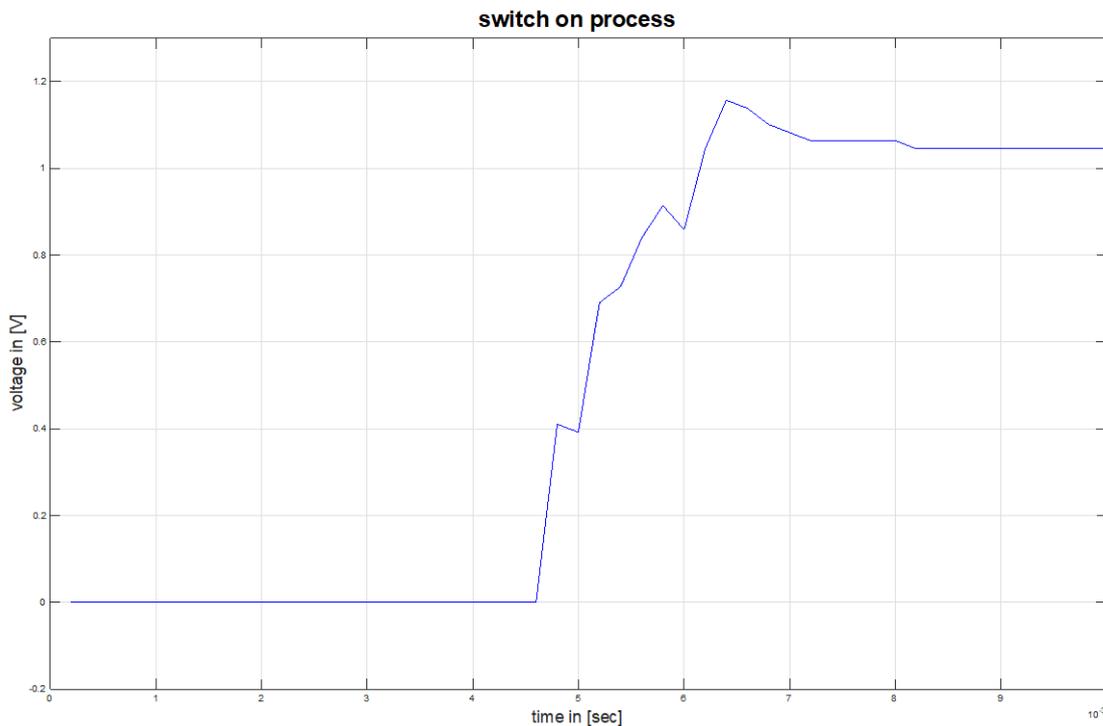


Abbildung 19 Gemessene Spannung beim Einschaltvorgang der Spule ($n = 400$, $L = 4,7 \text{ mH}$)

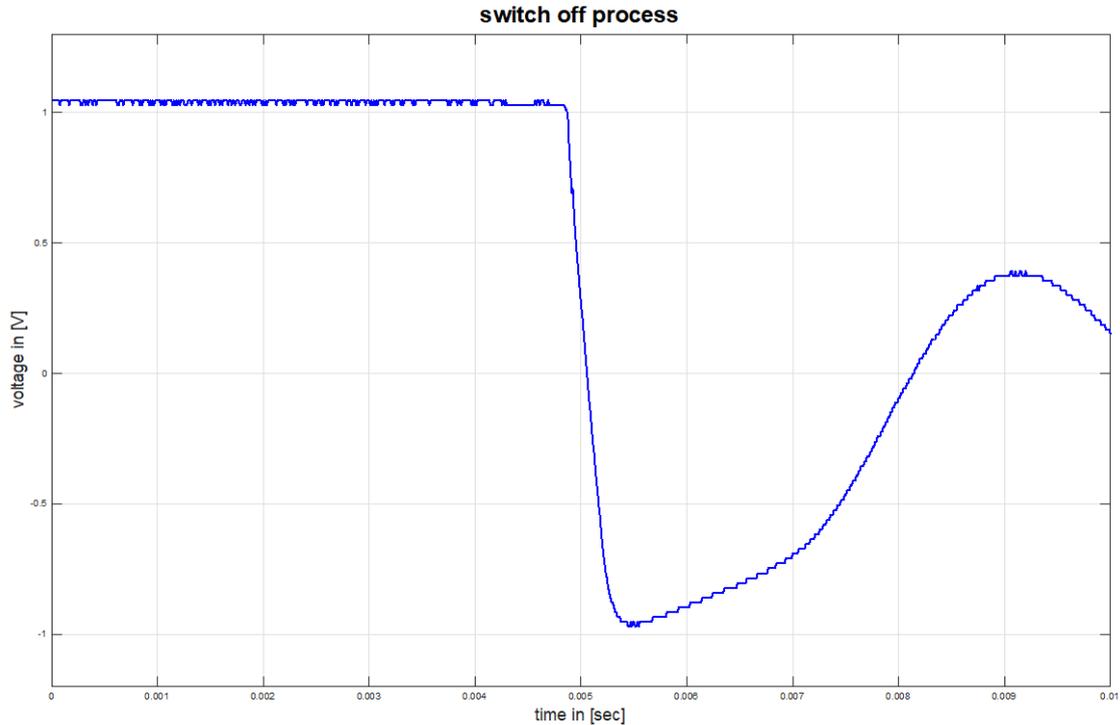


Abbildung 20 Ausschaltvorgang an der Spule mit Freilaufdiode ($n = 400$, $L = 4,7 \text{ mH}$)

3.2.1.2 Verifizierung der Erzeugung der magnetischen Flussdichte nach dem Gesetz von Biot-Savart

Zum Abgleich des Modells von Biot-Savart wurde die Spule in Vorarbeit ohne und mit Kern auf einem 2,5-D Zentrum in einem Bereich von $100 \times 100 \times 100 \text{ mm}$ in einem Raster von $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}$ vermessen. Es wurden die X-, Y- und Z-Komponenten der magnetischen Flussdichte ortsabhängig aufgenommen. Darüber hinaus wurden Messfahrten für verschiedene Stromstärken durchgeführt. In folgendem Inhalt wird sich nur auf eine Stromstärke ($0,5 \text{ A}$) beschränkt. Der Strom kann laut dem Gesetz von Biot-Savart einfach als proportionaler Faktor zur magnetischen Flussdichte betrachtet werden. Dies zeigten auch die Messungen.

Anhand der Messpunkte und physikalischen Gegebenheiten der Spule wurde analog die magnetische Flussdichte für die vermessenen Punkte berechnet. Zu Beginn der Simulation wurde der Verlauf des Drahtes der Spule definiert. In diesem konkreten Fall besitzt diese 400 Windungen verteilt auf 8 Layer mit einer Drahtstärke von $0,5 \text{ mm}$. Jede einzelne Windung muss in viele gleiche Teile unterteilt werden. Für diese Teilstücke wird dann die erzeugte magnetische Feldstärke für einen Punkt im Raum berechnet. Anschließend werden die berechneten Feldstärken in ihren drei Komponenten X, Y und Z aufsummiert. Dieser Vorgang wird für alle definierten Punkte im Raum wiederholt. Als erstes werden die physikalischen Parameter der Spule definiert.

```
% coil physical quantities
```

```
coil.L = 4.7e-3; % inductivity [H]
coil.R = 2.2; % electrical resistance [Ohm]
coil.Rho = 0.017; % specific resistance [(Ohm*mm2)/m]
coil.dWire = 0.0005; % diameter wire [m]
coil.h = 22.5e-3; % height coil [m]
coil.dL = 22.5e-3; % outer diameter coil [m]
coil.dS = 13e-3; % inner diameter coil [m]
coil.dM = 17.75e-3; % middle diameter coil [m]
coil.mue0 = pi*4e-7; % permeability [Vs/Am]
coil.layer = (1:1:8); % layer wire windings
```

Im nächsten Schritt werden die Windungen diskretisiert und in einem Array abgespeichert.

```
coil.l = (coil.R * coil.A)/coil.Rho; % length wire [m]
coil.n = 400; % coil windings

% windings per layer [windings per layer]
coil.nPerLayer = ceil(coil.n/length(coil.layer));
% declaration of the coordinates of the coil vector
coil.vector = zeros(length(coil.layer)*coil.nPerLayer*discrete.nPerWinding,3);
m = 1;
for k = 1:length(coil.layer)
    % diameter for the layer [m]
    coil.dForLayer = 1.1*2*coil.layer(k)*coil.dWire+coil.dS;
    % radius for the layer [m]
    coil.rForLayer = coil.dForLayer/2;
    coil.dZ = coil.h/coil.nPerLayer;

    for j = 1:coil.nPerLayer
        for i = 1:discrete.nPerWinding
            % start by the level zero
            l = i-1;
            o = j-1;
            % calculation of the xyz coordinates [m]
            coil.xCoordinate = coil.rForLayer*cos(discrete.dTheta*l);
            coil.yCoordinate = coil.rForLayer*sin(discrete.dTheta*l);

            % condition for going up or down of the windings
            if ((k/2) == round(k/2))
                coil.zCoordinate = (coil.dZ * o + ...
                    (coil.dZ/discrete.nPerWinding)*l);
            end
            if ((k/2) ~= round(k/2))
                coil.zCoordinate = coil.h-(coil.dZ * o + ...
                    (coil.dZ/discrete.nPerWinding)*l);
            end

            % mapping of the coordinates into a vector
            coil.vector(m,1) = coil.xCoordinate;
            coil.vector(m,2) = coil.yCoordinate;
            coil.vector(m,3) = coil.zCoordinate;
            m = m+1;
        end
    end
end
```

Geplottet sieht der Verlauf der Windungen wie folgt aus.

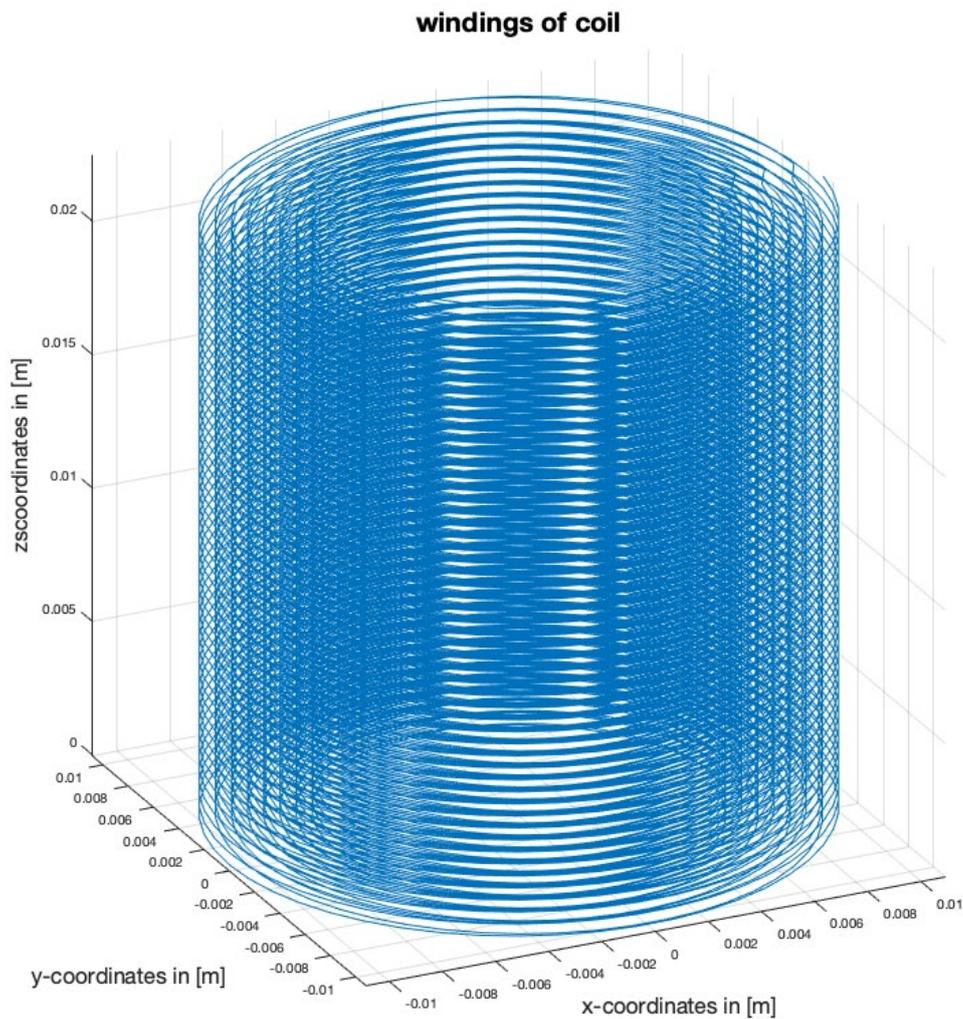


Abbildung 21 Windungen der betrachteten Spule (Biot-Savart)

Anschließend wird die Berechnung für die Erzeugung der magnetischen Flussdichte für jeden definierten Punkt durchgeführt.

```
% analytic law of Biot Savart
%          -> -> ->
% -> ->  mue * I  | - d s  x (r - r')
% B (r) = ----- * | -----
%          4 * PI  | -> ->
%          -| |r - r'| ^3
%
```

```
x_P = coil.vector(:,1);
y_P = coil.vector(:,2);
z_P = coil.vector(:,3);
```

```
for m = 1 : size(X_M,1)
  for n = 1 : size(Y_M,1)
    for p = 1 : size(Z_M,3)
      X_R = X_M(m,n,p);
      Y_R = Y_M(m,n,p);
      Z_R = Z_M(m,n,p);
```

```

for k = 1:length(x_P)-1
    % |r - r'|^3
    PkM3 = (sqrt((X_R-x_P(k))^2 + (Y_R-y_P(k))^2 + (Z_R-
        z_P(k))^2))^3;

    % d s x (r - r')
    DBx(k) = ((y_P(k+1)-y_P(k)) * (Z_R-z_P(k)) - (z_P(k+1)-z_P(k)) * (Y_R-
        y_P(k))) /PkM3;

    DBy(k) = ((z_P(k+1)-z_P(k)) * (X_R-x_P(k)) - (x_P(k+1)-x_P(k)) * (Z_R-
        z_P(k))) /PkM3;

    DBz(k) = ((x_P(k+1)-x_P(k)) * (Y_R-y_P(k)) - (y_P(k+1)-y_P(k)) *
        (X_R-x_P(k))) /PkM3;

end
% Sum
B_x(m,n,p) = B_x(m,n,p) + coil.mue0*1/4/pi*sum(DBx);
B_y(m,n,p) = B_y(m,n,p) + coil.mue0*1/4/pi*sum(DBy);
B_z(m,n,p) = B_z(m,n,p) + coil.mue0*1/4/pi*sum(DBz);
end
end
end

```

Durch einen Vektorplot werden die berechneten und gemessenen Werte in einem diskreten Vektorfeld dargestellt.

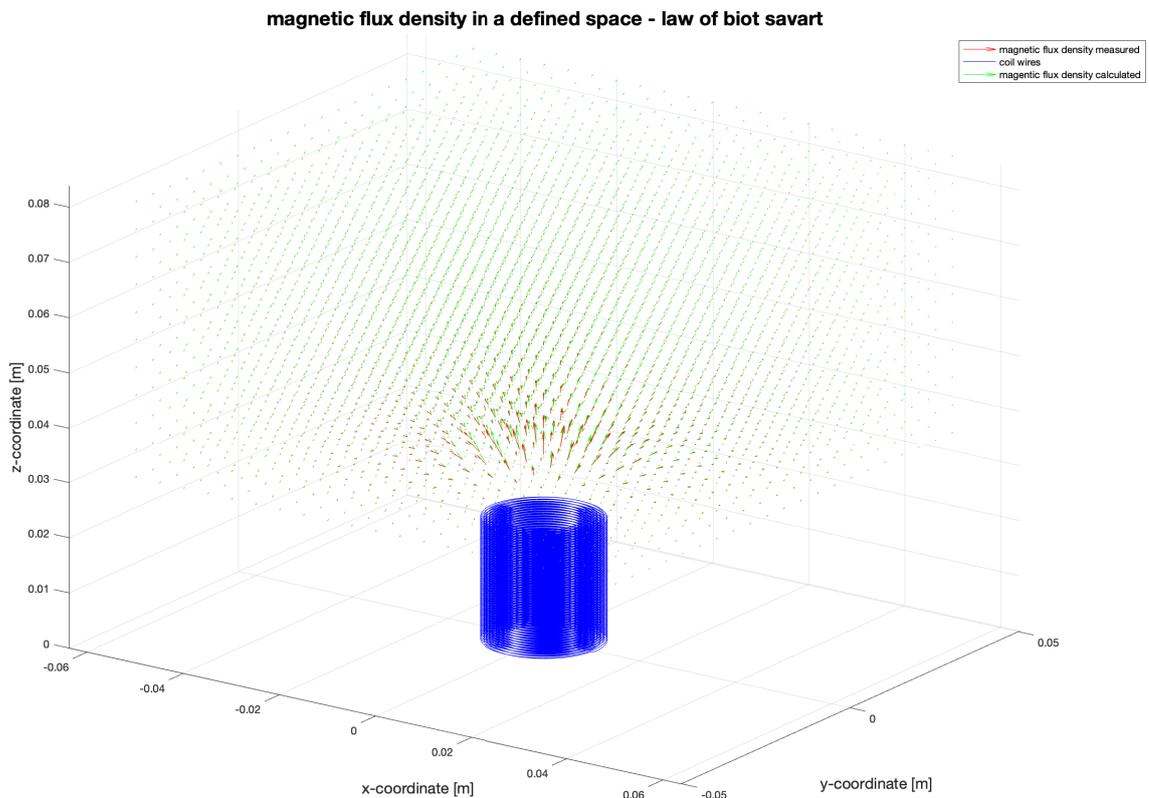


Abbildung 22 Magnetische Flussdichte einer Spule mit 400 Windungen und 0,5 A anliegenden Strom (ohne Kern)

Da aus diesem Diagramm die Abweichungen zur Realität nicht direkt erkennbar sind, wurden die berechneten und gemessenen magnetischen Flussdichten in ihre Komponenten aufgeteilt und in gleichem Muster hintereinander in einem Array angeordnet. So können diese gegeneinander in einem zweidimensionalen Diagramm eingetragen werden. Die Farbe Rot steht für die berechneten und Blau für die gemessenen Werte. Grundsätzlich ist ein kleiner Offset zwischen gemessenen und simulierten Werten erkennbar. Dieser kann auf äußere Umwelteinflüsse zurückzuführen sein, da die Messungen in keinem abgeschirmten Raum durchgeführt worden sind.

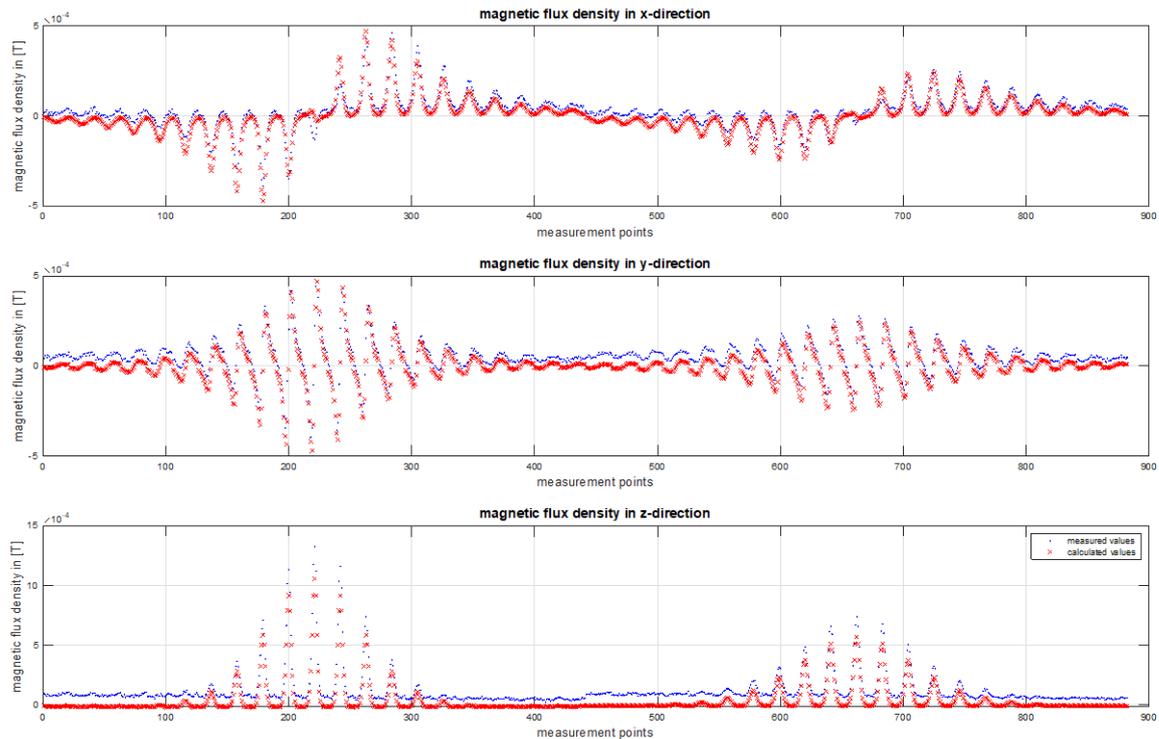


Abbildung 23 Magnetische Flussdichte einer Spule mit 400 Windungen (Strom 0,5 A) - Werte gemessen und berechnet

In folgender Tabelle sind die Abweichungen der berechneten von den Messwerten als Standardabweichung dargestellt.

| <i>Standardabweichung</i> | |
|---------------------------|--------------|
| <i>x-Richtung</i> | 2.8488e-05 T |
| <i>y-Richtung</i> | 2.6902e-05 T |
| <i>z-Richtung</i> | 2.3948e-05 T |

Tabelle 16 Standardabweichungen in X-, Y- und Z-Richtung für Spule ohne Kern

Im nächsten Schritt wird die Messung mit Kern betrachtet. Als Referenz dient die Messung ohne Kern. Aus dieser Vorgabe wird die magnetische Permeabilität mit Hilfe einer Fehlerausgleichsrechnung bestimmt.

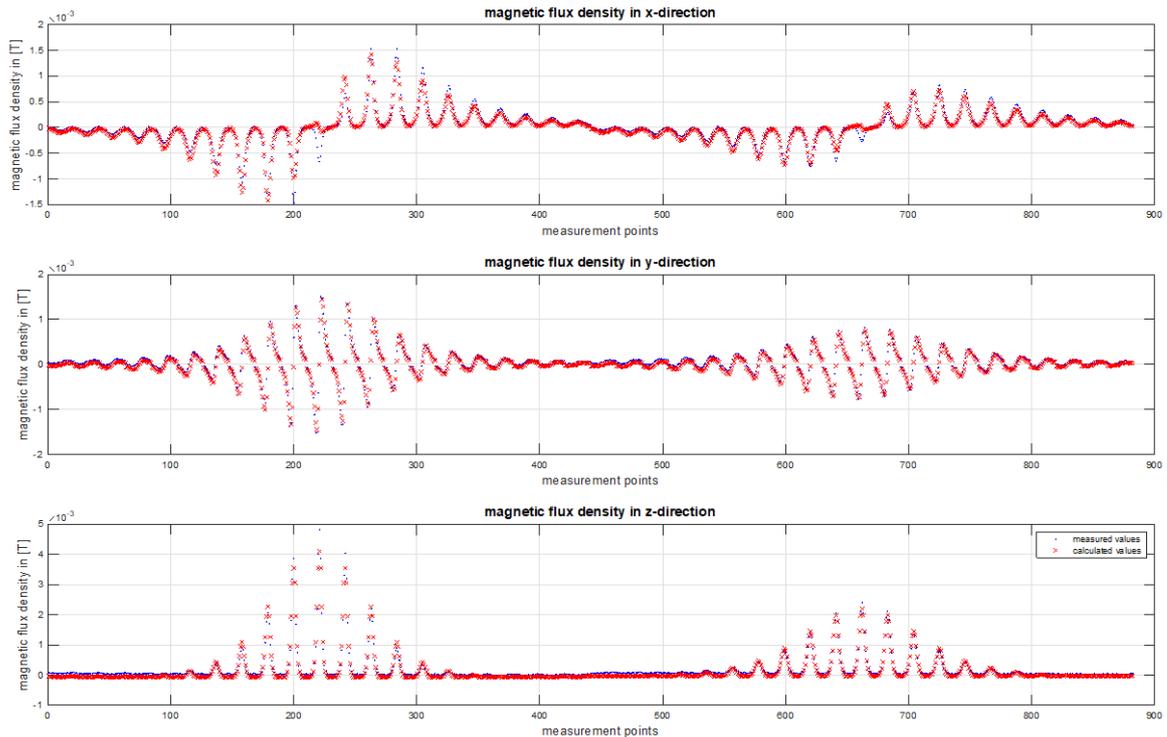


Abbildung 24 Vergleich der Messwerte mit den berechneten Werten nach Biot Savart

Die relative magnetische Permeabilität wurde für jede Komponente geschätzt. Dabei ergibt sich eine mittlere magnetische Permeabilität von 3,34. Diese Konstante wird unter diesen Umständen als richtungsunabhängig betrachtet. Da die Spule einen Kern besitzt, der 2 mm in Z-Richtung über das Volumen des Körpers ragt, erklärt sich der erhöhte Wert der Permeabilität in Richtung der Rotationsachse.

Relative magnetische Permeabilität

| | |
|-------------------|--------|
| <i>X-Richtung</i> | 3.0091 |
| <i>Y-Richtung</i> | 3.0616 |
| <i>Z-Richtung</i> | 3.8780 |

Tabelle 17 Geschätzte relative Permeabilität (0,5 Ampere, Spule mit Kern und 400 Wicklungen)

Anschließend wurde wieder die Standardabweichung in alle drei Raumrichtungen betrachtet.

Standardabweichung

| | |
|-------------------|--------------|
| <i>x-Richtung</i> | 2.2400e-05 T |
| <i>y-Richtung</i> | 5.0172e-05 T |
| <i>z-Richtung</i> | 5.7730e-05 T |

Tabelle 18 Standardabweichung der Messwerte zu berechneten Werten (0,5 Ampere, Spule mit Kern und 400 Wicklungen)

Im folgenden Plot wurden der Betrag und die absolute Abweichung der magnetischen Flussdichte der Spule mit Kern betrachtet.

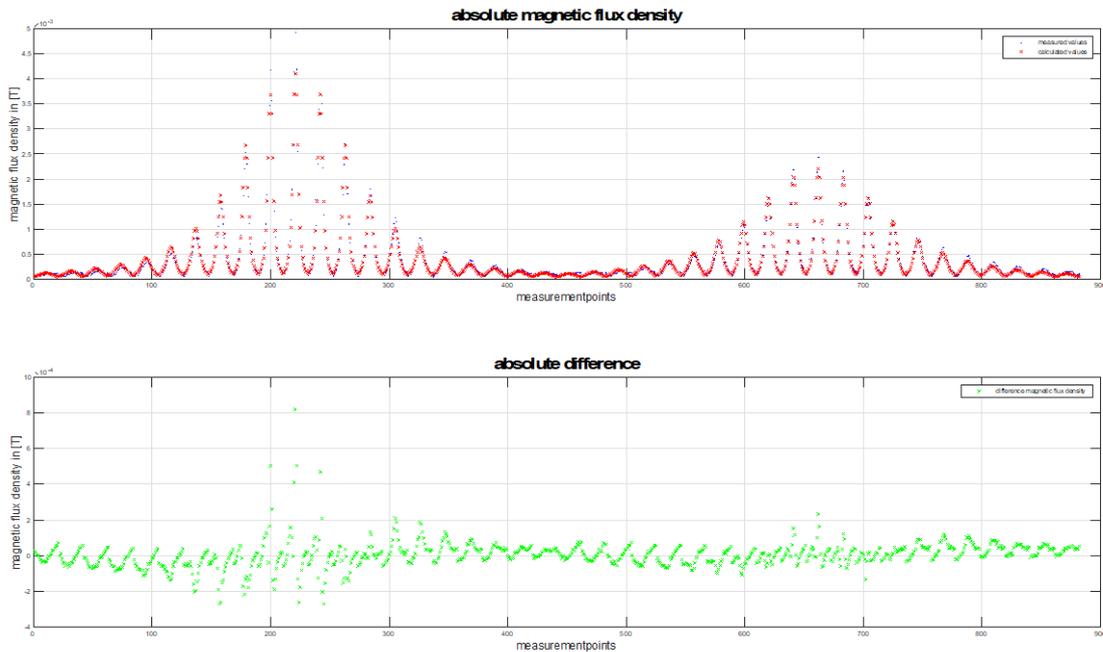


Abbildung 25 Vergleich des Betrages der magnetischen Flussdichte der Spule mit 400 Windungen und Kern (Strom = 0,5 A)

Hier erkennt man die Abhängigkeit der magnetischen Permeabilität vom Strom. Dabei kann bei höheren Strömen eine Sättigung eintreten. Da die magnetische Permeabilität in diesem Betrachtungsfall relativ gering ist, wird sie in den Modellen als konstant angenommen. Würde der Kern eine hohe magnetische Permeabilität aufweisen, müsste die Magnetisierungskurve miteinbezogen werden.

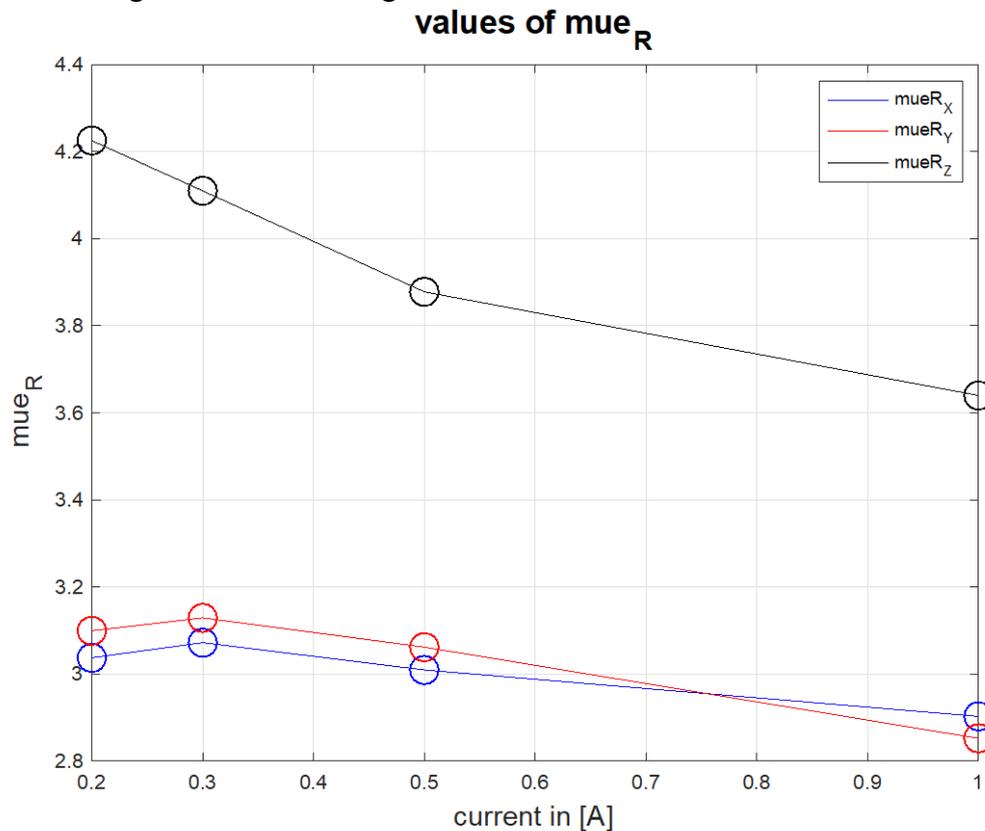


Abbildung 26 Magnetische Permeabilität des Spulenkerns

| Mittelwert μ_r | |
|--------------------|------|
| <i>x-Richtung</i> | 3,01 |
| <i>y-Richtung</i> | 3,06 |
| <i>z-Richtung</i> | 3,96 |

Tabelle 19 Mittelwerte für relative magnetische Permeabilität von Spulenferritkern

3.2.2 Darstellung der indirekten Proportionalität zwischen der magnetischen Flussdichte und dem Strom einer Spule

Als Versuchsaufbau wurde mittig an die Stirnfläche einer Spule ohne Kern ein Hallsensor befestigt. Dieser misst die magnetische Flussdichte in ihrer Z-Komponente in Richtung der Rotationsachse (Z-Komponente). Mit einer einstellbaren Konstantstromquelle wurde die Spule im Bereich zwischen -2 bis 2 Ampere in Schritten von 10 mA bestromt. Dazu wurde die Kennlinie des Sensors (unterer Subplot) aufgenommen.

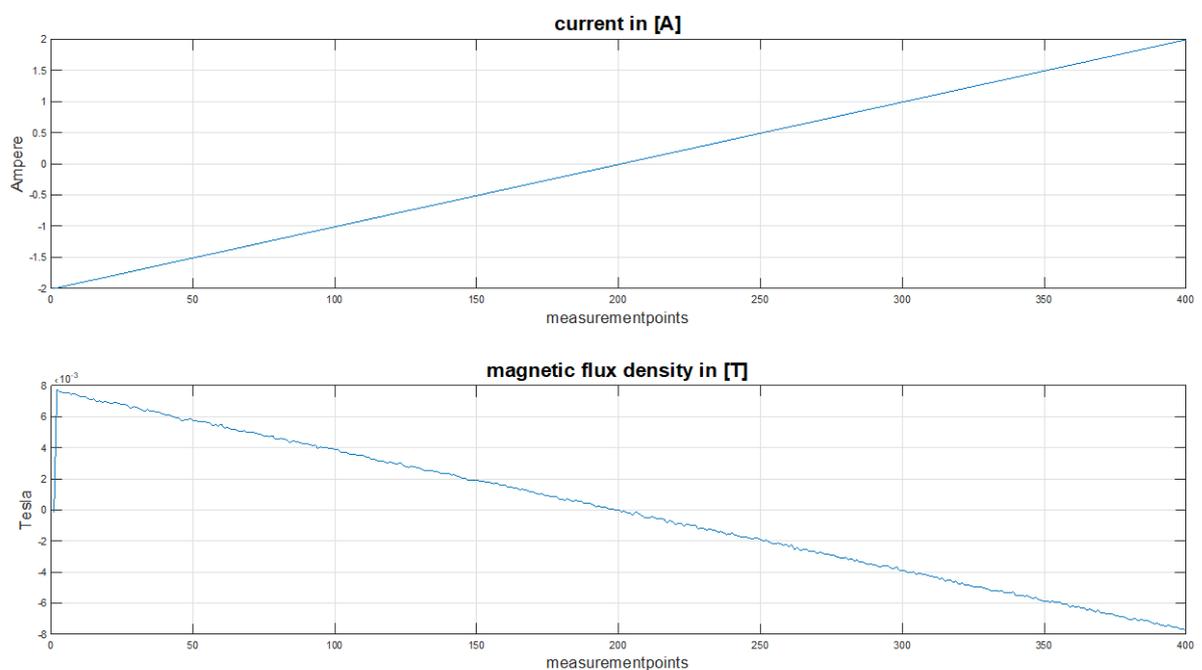


Abbildung 27 Lineare Abhängigkeit zwischen der magnetischen Flussdichte und Strom einer Spule

Die beiden Kennlinien zeigen, dass die magnetische Flussdichte als proportional zur magnetischen Feldstärke betrachtet werden kann.

3.2.3 Magnetischer Dipol

In dieser Arbeit werden zwei verschiedene physikalische Modelle für das Feld eines Dipols betrachtet. Das erste betrachtet im Gegensatz zum zweiten Modell die Geometrie des Körpers nicht. Abschließend werden die beiden Modelle abgeglichen und Aussagen zu ihrer Qualität getroffen. Als Versuchsobjekt wurde ein kleiner Neodymzylindermagnet mit einem Durchmesser von 5 mm und einer Höhe von 8 mm. Eigentliches Ziel ist es, das magnetische Dipolmoment zu bestimmen, um das Feld des Permanentmagneten in verschiedenen Punkten berechnen zu können. Mit Hilfe dieser Modelle wäre angedacht, die Position und Lage des Schwebemagneten unter Einsatz von Hallensoren zu berechnen.

3.2.3.1 Bestimmung des magnetischen Dipolmoments anhand der Feldberechnung der magnetischen Flussdichte ohne Geometrieinfluss
 Folgender Ausdruck beschreibt das Feld der magnetischen Flussdichte eines magnetischen Dipols abhängig vom Ort \vec{r} . Mit folgenden Umformungen kann man das magnetische Dipolmoment als Faktor darstellen.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{3\vec{r}(\vec{m} * \vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^3}$$

Umstellung der Formel:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{3\vec{r}(\vec{m} * \vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^3}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^2} =: C$$

$$r^3 =: k$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{C}{k} 3\vec{r}(\vec{m} * \vec{r}) - \vec{m}r^2$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{C}{k} (3\vec{r}\vec{r}^T - r^2 I) * \vec{m}$$

$$\vec{B}_i(\vec{r}_i) = \frac{C_i}{k_i} (3\vec{r}_i\vec{r}_i^T - (r_i)^2 I) * \vec{m}_i$$

Unter dieser Voraussetzung kann folgender Teil ortsabhängig berechnet werden.

$$\frac{C_i}{k_i} (3\vec{r}_i\vec{r}_i^T - (r_i)^2 I)$$

Durch die aufgenommenen Messdatensätze kann nun mit Hilfe einer linearen Regression das magnetische Dipolmoment geschätzt werden.

In der Vorarbeit wurden die Messwerte in dreidimensionalen Matrizen aufgenommen. Für jede Komponente der magnetischen Flussdichte im Raum wurde eine Messmatrix erzeugt. Zusätzlich wurden zu jedem Messpunkt die entsprechenden Koordinaten abgelegt. Diese Daten sind abschließend zur Weiterverarbeitung im nachfolgenden System abgespeichert worden:

| <i>Matrix</i> | <i>Beschreibung</i> | <i>Einheit</i> |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------|
| <i>xBmeasurementMatrix</i> | Magnetische Flussdichte in x-Richtung | Tesla |
| <i>yBmeasurementMatrix</i> | Magnetische Flussdichte in y-Richtung | Tesla |
| <i>zBmeasurementMatrix</i> | Magnetische Flussdichte in z-Richtung | Tesla |
| <i>BmeasurementMatrix</i> | Magnetische Flussdichte Betrag | Tesla |
| <i>xMeasurementGrid</i> | Rasterung in der x-Koordinate | mm |
| <i>yMeasurementGrid</i> | Rasterung in der y-Koordinate | mm |
| <i>zMeasurementGrid</i> | Rasterung in der z-Koordinate | mm |

Tabelle 20 Messmatrizen

Um äußere Einflüsse zu kompensieren, wurde der Messraum zuerst ohne Magnet vermessen. Diese aufgenommenen Werte wurden dann am Anfang von den entsprechenden Messwerten subtrahiert.

Um Umrechnungsfehler zu vermeiden, wurden die Messwerte in ihren Grundeinheiten abgespeichert.

Um die Fehlerausgleichsrechnung durchführen zu können, wurden die Messwerte nach einem Schema in ein Array eingeordnet. Analog zu diesem Messarray wurden die entsprechenden Werte anhand der oben genannten Formel erzeugt. Abschließend wurde daraus die Pseudoinverse gebildet, um das magnetische Dipolmoment zu ermitteln.

Mit diesem geschätzten Vektor wurde dann abschließend auf die magnetische Flussdichte anhand des physikalischen Modells zurückgerechnet und mit der Realität verglichen.

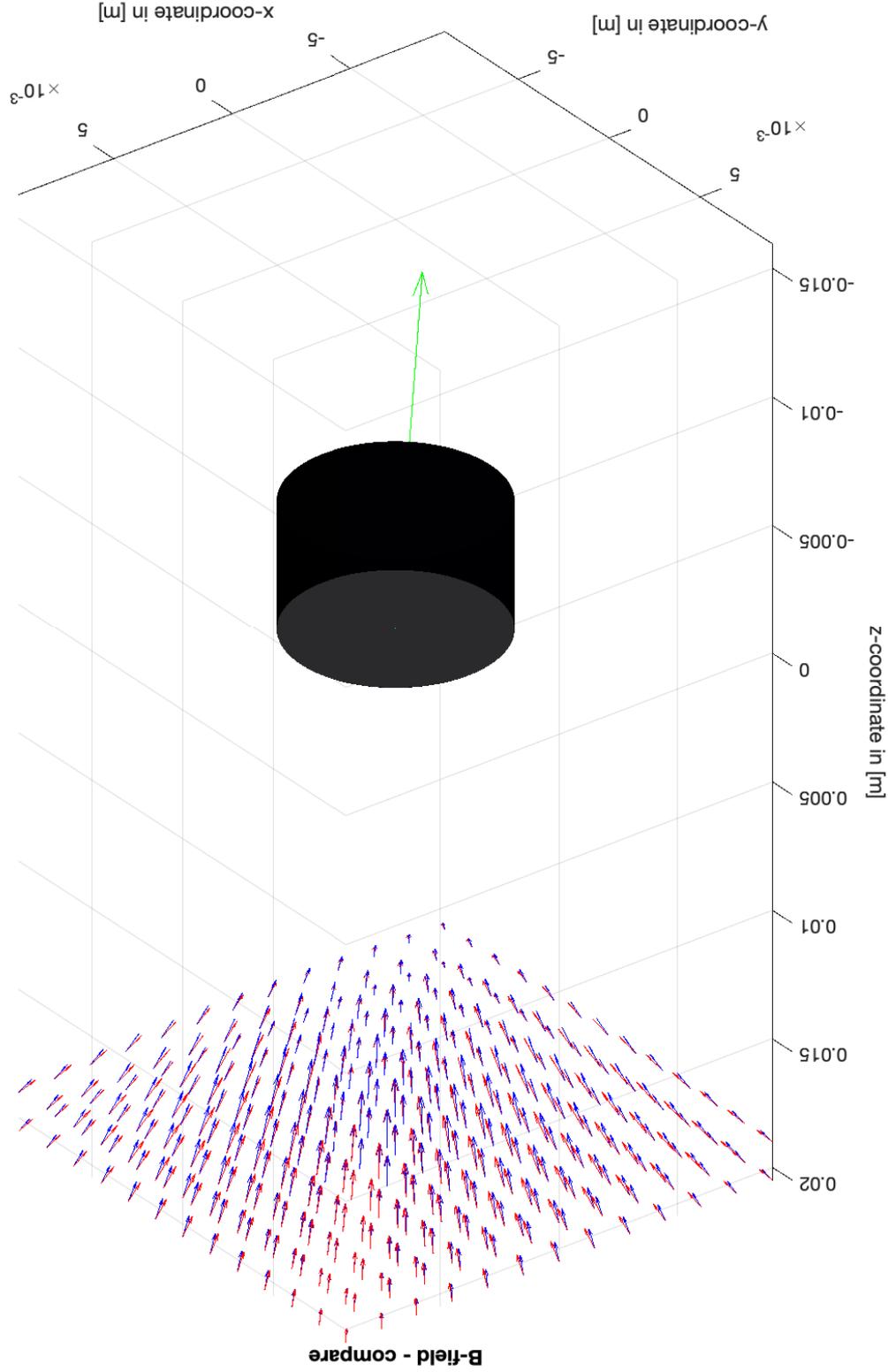


Abbildung 28 Darstellung magnetischer Flussdichte - Berechnung und Messung (Vektorplot)

measured values
 estimated dipol moment
 estimated values

Die magnetische Flussdichte wird im nächsten Diagramm über ihren Betrag dargestellt. Es werden berechnete und gemessene Werte verglichen. An zweiter Stelle steht die prozentuale Abweichung zwischen Messwert und geschätztem Wert. Als letztes wird der Abweichungswinkel zwischen Messung und Berechnung dargestellt.

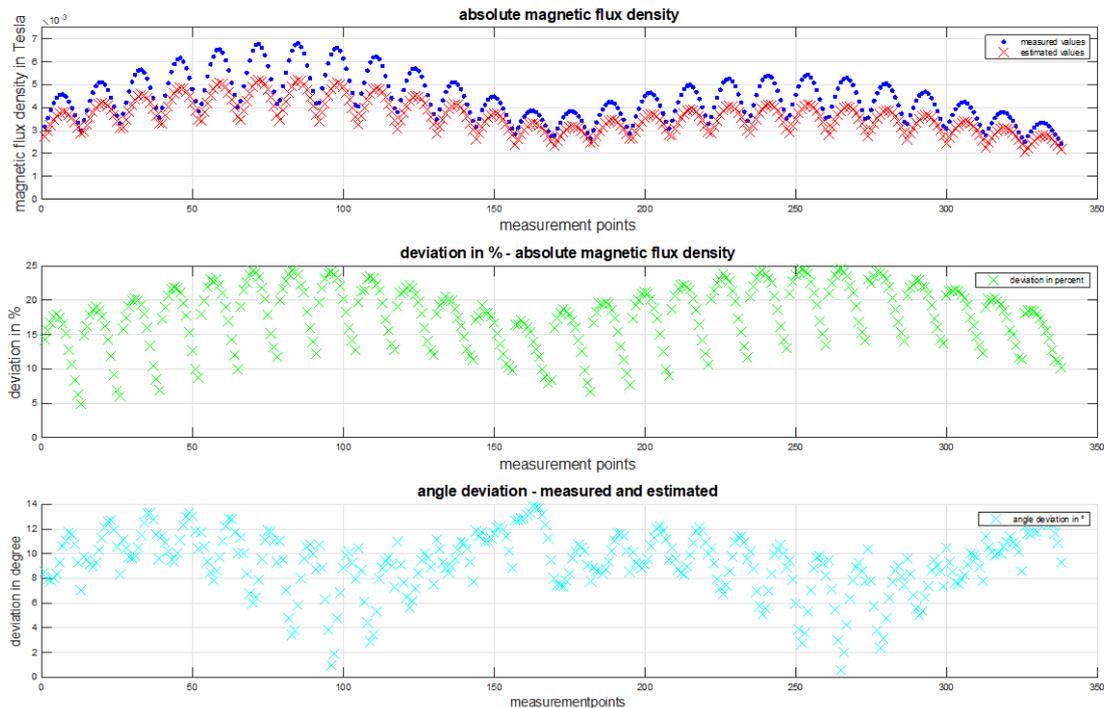


Abbildung 29 Vergleich des Betrags und Winkels der magnetischen Flussdichte eines Dipols (Modell ohne Geometrie)

Für das geschätzte magnetische Dipolmoment ergaben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} m_x &= 0.016012 \text{ Am}^2 \\ m_y &= 0.037346 \text{ Am}^2 \\ m_z &= -0.17697 \text{ Am}^2 \\ |m| &= 0.18157 \text{ Am}^2 \end{aligned}$$

3.2.3.2 Bestimmung des magnetischen Dipolmoments anhand der Feldberechnung der magnetischen Flussdichte unter Geometrieinfluss
Dieses Modell betrachtet nur die magnetische Flussdichte in ihrer Z-Komponente. Außerdem wird hier die Geometrie des Magnetzylinders miteinbezogen. Für jeden Permanentmagneten kann ein sogenanntes Potential nach folgendem Ausdruck dargestellt werden.

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{A_1} \frac{-M_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA' - \frac{1}{4\pi} \int_{A_2} \frac{M_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA'$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|---|
| Φ | Magnetische Potential |
| \mathbf{M} | Magnetisierung |
| \vec{r} | Ortsvektor vom Ursprung zum Punkt an dem das Feld berechnet werden soll |
| \vec{r}' | Ortsvektor vom Ursprung zu einem Punkt auf der Polfläche |
| A_1 | Polfläche Nord |
| A_2 | Polfläche Süd |

Tabelle 21 Beschreibung der Parameter Potentialgleichung für einen Zylindermagneten

Dieses Modell kann so umgestellt werden, dass die Magnetisierung als Faktor dargestellt werden kann.

$$\Phi(\vec{r}) = M_x * \left(-\frac{1}{4\pi}\right) \left(\int_{A_1} \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}^j|} dA' + \int_{A_2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}^j|} dA' \right)$$

Diese Form dient in Bezug auf die Messdaten zu einer Fehlerausgleichrechnung und zur Bestimmung der Magnetisierung. Die Magnetisierung und das magnetische Dipolmoment stehen in folgendem Zusammenhang:

$$\vec{m} = \vec{M} * V$$

Um die magnetische Flussdichte zu berechnen, wird folgendes Modell verwendet:

$$\vec{B}(z) = \left(\frac{1}{2} * \mu_0 \Phi(z)\right) * \vec{e}_z$$

Um das Modell in einem Matlabskript darzustellen, werden verschiedene Schritte durchgeführt.

Die beiden Polflächen werden in kleine Teilflächen nach folgendem Schema zerlegt. Dazu werden ihre zugehörigen Ortsvektoren in gleicher Reihenfolge in einem Array generiert. Aufgrund der Zylinderform beziehungsweise der kreisförmigen Polfläche wird im Skript meist mit Polarkoordinaten gearbeitet.

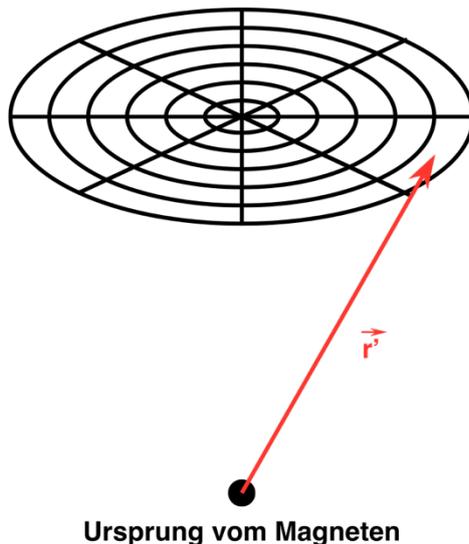


Tabelle 22 Diskretisierung Polfläche

```
% discretization
disPointsRadius = 50;
disPointsAngle = 50;
angleDis = linspace(0,2*pi,disPointsAngle)';
radiusDis = linspace(0,radiusMagnet,disPointsRadius)';
radiusDisHalf = (radiusMagnet/(disPointsRadius-1))*0.5;

areaRing = zeros(length(radiusDis)-1,1);
areaRingDis = zeros(length(radiusDis)-1,1);
for i = 1:length(radiusDis)-1
    areaRing(i) = (radiusDis(i+1)^2-radiusDis(i)^2)*pi;
    areaRingDis(i) = areaRing(i)/(length(radiusDis)-1);
end

% A1 polar coordinates
polarCoorA1 = zeros((length(angleDis)*(length(radiusDis)-1)),3);
```

```

dArea1 = zeros((length(angleDis)*(length(radiusDis)-1)),1);

k = 1;
for i = 1:length(radiusDis)-1
    for j = 1:length(angleDis)
        polarCoorA1(k,1) = radiusDis(i)+radiusDisHalf;
        polarCoorA1(k,2) = angleDis(j);
        polarCoorA1(k,3) = heightHalfMagnet;
        % dArea is for A2 the same Array (pole areas are equal);
        dArea1(k) = areaRingDis(i);
        k = k+1;
    end
end

% A2 polar coordinates
polarCoorA2 = zeros((length(angleDis)*(length(radiusDis)-1)),3);
dArea2 = zeros((length(angleDis)*(length(radiusDis)-1)),1);
k = 1;
for i = 1:length(radiusDis)-1
    for j = 1:length(angleDis)
        polarCoorA2(k,1) = radiusDis(i)+radiusDisHalf;
        polarCoorA2(k,2) = angleDis(j);
        polarCoorA2(k,3) = heightHalfMagnet;
        % dArea is for A2 the same Array (pole areas are equal);
        dArea2(k) = areaRingDis(i);
        k = k+1;
    end
end

```

Als zweites wurde der Berechnungsraum, der vom Vermessungsraum abhängt, definiert. Anschließend wird $\Phi(\vec{r})$ ohne den Faktor der Magnetisierung durch diskrete Integration berechnet. Diese berechneten Werte werden wie im vorhergehenden Modell in gleicher Reihenfolge in Arrays angeordnet. Durch eine Fehlerausgleichsrechnung kann nun auf die Magnetisierung des Dipols geschlossen werden. Das geschätzte magnetische Dipolmoment kann nun mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen Magnetisierung und Volumen bestimmt werden. Anhand der folgenden Plots wird die Qualität des Modells im Vergleich zur Realität dargestellt.

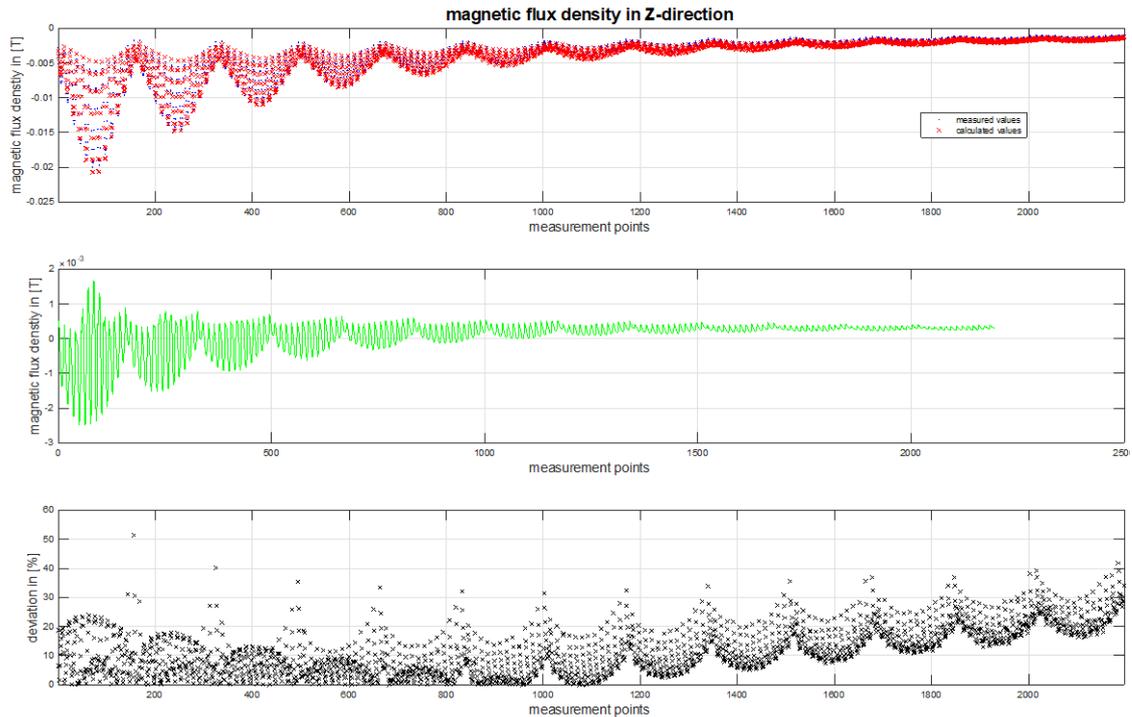


Abbildung 30 Magnetische Flussdichte (Z-Komponente) des Dipols unter Berücksichtigung der Geometrie

Für das geschätzte magnetische Dipolmoment ergab sich ein Wert von:

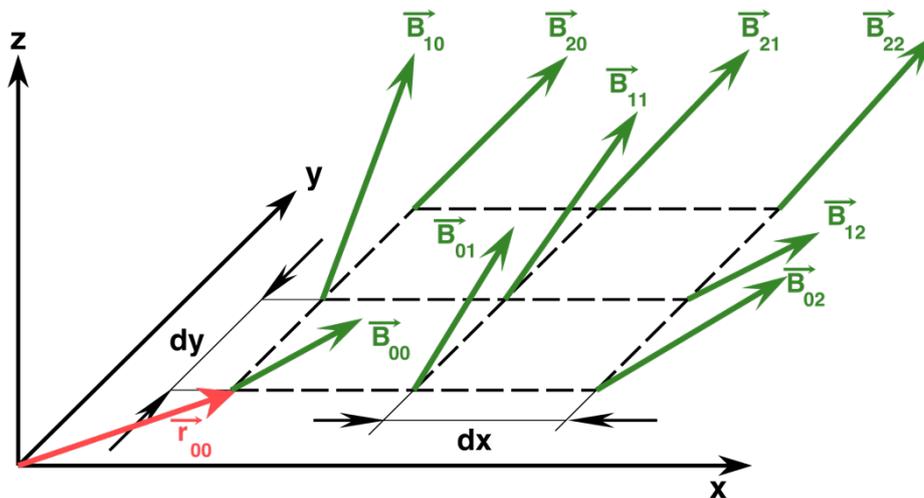
$$m_z = -0.279 \text{ Am}^2$$

3.2.4 Bewertung der beiden Modelle

Im Allgemeinen können die beiden physikalischen Modelle die magnetische Flussdichte annäherungsweise darstellen. Jedoch ist im Betrag der berechneten Werte mit prozentualen Abweichungen von circa 25 Prozent zu rechnen. Unter diesen Voraussetzungen kann ein Modell zur grundlegenden Auslegung der physikalischen Komponenten und Regelung verwendet werden. In Bezug auf die reale Regelung kann solch ein physikalisches Modell jedoch höchstwahrscheinlich nicht für die Position- und Lagebestimmung des Magneten dienen. Außerdem sind Störungen von außen durch Einstrahlungen auf die Hallsensoren möglich. Des Weiteren kann sich ein Feld eines Dauermagneten in seiner Lebenszeit verändern. Ausschlaggebend sind dabei Stöße und Temperatureinflüsse.

3.2.5 Experiment zur Berechnung der magnetischen Kraft

Um die Richtigkeit des physikalischen Modells sicherzustellen, wurde folgender Versuchsaufbau erstellt. Folgendes Diagramm zeigt die diskrete Ableitung im zwei-dimensionalen Raum. Im folgenden Experiment wird nur eine Betrachtung in einem dimensionalen Bereich durchgeführt.



$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{B_{01x} - B_{00x}}{\Delta x}$$

Analoges Vorgehen gilt für die Ableitungen nach dy und dz .

Als Versuchsaufbau diente der Magnetschweberversuch im Regelungstechnik Labor der Technischen Hochschule Rosenheim. Der Aufbau besteht aus folgenden Komponenten:

- Spule mit Ferritkern zur Erzeugung des Magnetfeldes
- Photodiode zur Bestimmung der Schwebeposition des Körpers
- Beleuchtung für die Positionsbestimmung
- Leistungselektronik zur Bestromung der Spule
- Mikrocontroller auf dem der Regelalgorithmus implementiert ist
- Computer zur Auswertung und Ansteuerung des Versuchs über Matlab/Simulink
- Schwebekörper aus Stahl (rot-schwarz), in diesem Fall wurde eine Neodymmagnet mit einem Tennisball genutzt (mit schwarz umwickeltem Isolierband)

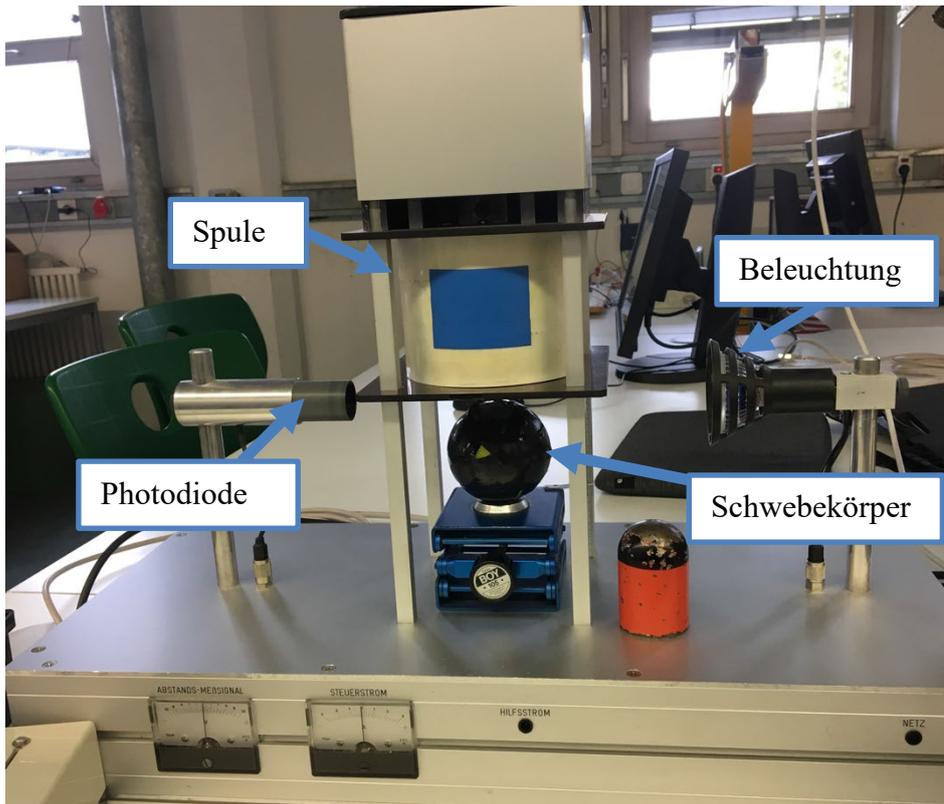


Tabelle 23 Magnetschwebeversuch zur Evaluierung der Formel zur Kraftbestimmung

Der Versuch wird normalerweise mit größeren Schwebekörpern aus Metall durchgeführt. In diesem Anwendungsfall soll ein Neodymmagnet verwendet werden. Dieser erzeugt allerdings zu wenig Schatten zur Positionsbestimmung. Deshalb wurde ein Tennisball mit Neodymmagneten mit schwarzem Isolierband umwickelt. Der Tennisball hat eine Masse von 0,07 kg und somit eine Gewichtskraft von 0,686 N. Nach erfolgreichem Einstellen der Regelparameter schwebt der Tennisball mit Magnet. Diese Position wird in folgendem Diagramm als Nullpunkt definiert. An diesem Punkt, das heißt im Schwerpunkt des Magneten, wurde die magnetische Flussdichte gemessen. Zusätzlich wurde in einem Bereich von drei Millimeter unter und über dieser Position mit Abständen von einem Millimeter die B-Feld bestimmt.

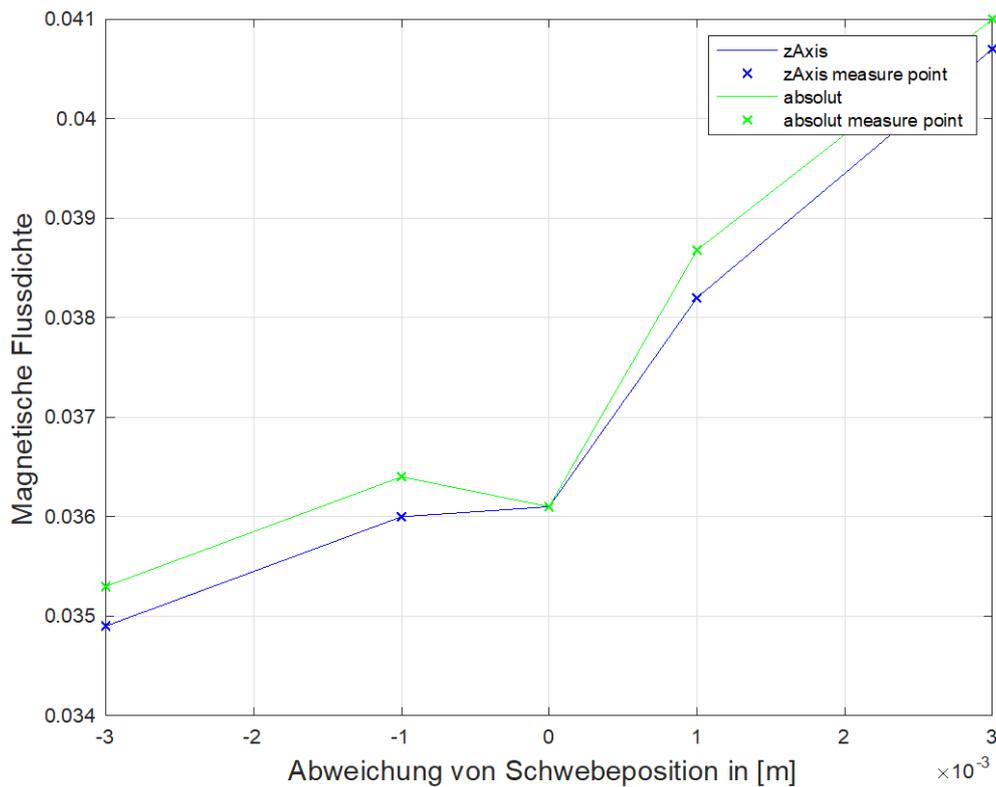


Tabelle 24 Schwebebeposition in Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte

Nach der Formel bestimmt die Änderung des Magnetfelds die wirkende Kraft auf den Schwebekörper. Hier wurde die Änderung des Magnetfelds durch eine Erhöhung der Messposition auf der Z-Achse (Symmetrieachse der Spule) von einem Millimeter betrachtet. Durch betrachtete Änderung ergibt sich somit Folgendes:

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{B_{01z} - B_{00z}}{\Delta z} = \frac{0,03868 \text{ T} - 0,0361 \text{ T}}{0,001 \text{ m}} = 0,3000 \frac{\text{T}}{\text{m}}$$

$$F_m = \frac{\partial B}{\partial z} * \vec{m} = 0,3000 \frac{\text{T}}{\text{m}} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \text{Am}^2 = 0,774 \text{ N}$$

$$\Delta F = F_g - F_m = 0,686 \text{ N} - 0,774 \text{ N} = -0,0872 \text{ N}$$

Dieses Ergebnis spricht für die Korrektheit der Formel. Mit einer Abweichung von circa 12 % war zu rechnen, da sicherlich Messfehler und Annäherungsfehler aufgrund der physischen Gegebenheiten begangen wurden. Zudem wurde bei der Berechnung nicht mit der Z-Komponente (blau im Diagramm) des Feldes gerechnet, sondern mit dem Betrag des Feldes (grün im Diagramm). Auf der Symmetrieachse sollten nämlich die Werte für die X- und Y-Komponenten null sein. Jedoch erschwert die Positionierung von Hand die genaue Messung. Grundlegend bestätigt das Experiment das mathematische Modell.

3.2.6 Positions- und Lagebestimmung aus Magnetfeldmessung

Mit Hilfe der physikalischen Modelle wurde eine mathematische Position und Lageberechnung für den Plattformschwebeversuch entwickelt. Da die Modelle durch ihre großen Abweichungen von den realen Messwerten nur bedingt zuverlässig sind, wird im Weiteren der Einsatz von LookUp Tables und dementsprechenden Interpolationen beabsichtigt. Die angedachte Herleitung der Position- und Lagebestimmung kann im Anhang (4.1) dieser Arbeit gefunden werden.

3.2.7 Darstellung der physikalischen Gesetze in Bezug auf ihre diskrete Form

In Simulationsmodellen kann in vielen Fällen nicht immer auf die Vereinfachung von kontinuierlichen Systemen zurückgegriffen werden. Darum soll im folgenden Abschnitt die Diskretisierung und mathematische Anwendungen in Bezug auf die physikalischen Gesetze dargestellt werden.

3.2.7.1 Berechnung der magnetischen Flussdichte zur gewünschten Kraft

Die Kraftwirkung eines magnetischen Dipols in einem äußeren Feld wird über die Änderung der magnetischen Flussdichte berechnet. In der Vektorschreibweise beschreibt dies folgender Zusammenhang:

$$\vec{F} = (\vec{B}_1 \otimes \vec{\nabla}) * \vec{m}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} * \vec{m}$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

Als Gleichungssystem:

$$F_x = \frac{\partial B_x}{\partial x} m_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} m_y + \frac{\partial B_x}{\partial z} m_z$$

$$F_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} m_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} m_y + \frac{\partial B_y}{\partial z} m_z$$

$$F_z = \frac{\partial B_z}{\partial x} m_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} m_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} m_z$$

Um dieses Gleichungssystem im diskreten Fall darzustellen, wird folgende Indizierung für den Ableitungs- beziehungsweise Differenzenstern verwendet.

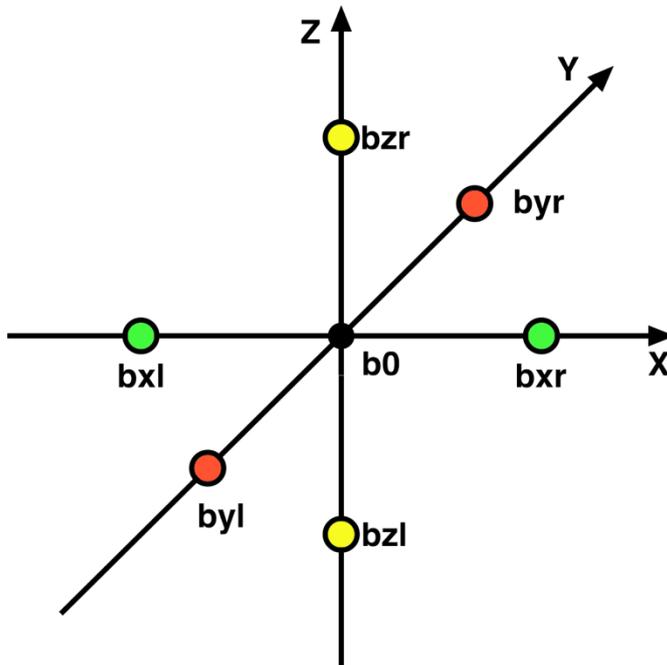


Abbildung 31 Ableitungskreuz und Indizierung

Die kommandierte magnetische Flussdichte B_0 in der Mitte des Differenzkreuz wird aus den Drehmomentbedingungen berechnet.

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_y * B_z - m_z * B_y \\ m_z * B_x - m_x * B_z \\ m_x * B_y - m_y * B_x \end{bmatrix}$$

Das Moment um die Z-Achse wird vernachlässigt, da der Körper um diese Achse rotationssymmetrisch ist. Da das Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und den drei Parametern B_x , B_y und B_z überbestimmt ist, wird die Variable B_z durch das Magnetfeld vom Magnetring gewählt. Daraus ergeben sich dann folgende Bedingungen:

$$b_{x0} = \frac{M_x - m_y B_{z0}}{-m_z}$$

$$b_{y0} = \frac{M_y + m_x B_{z0}}{m_z}$$

$$b_{z0} = B_{\text{Magnetring}}$$

$$\partial b_{xR_x} = \frac{b_{xR_x} - b_{x0}}{\Delta x}$$

$$\partial b_{xR_y} = \frac{b_{xR_y} - b_{x0}}{\Delta y}$$

$$\partial b_{xR_z} = \frac{b_{xR_z} - b_{z0}}{\Delta z}$$

$$\partial b_{yR_x} = \frac{b_{yR_x} - b_{y0}}{\Delta x}$$

$$\partial b_{yR_y} = \frac{b_{yR_y} - b_{y0}}{\Delta y}$$

$$\partial b_{yR_z} = \frac{b_{yR_z} - b_{y0}}{\Delta z}$$

$$\partial b_{xL_x} = \frac{b_{x0} - b_{xL_x}}{\Delta x}$$

$$\partial b_{xL_y} = \frac{b_{x0} - b_{xL_y}}{\Delta y}$$

$$\partial b_{xL_z} = \frac{b_{x0} - b_{xL_z}}{\Delta z}$$

$$\partial b_{yL_x} = \frac{b_{y0} - b_{yL_x}}{\Delta x}$$

$$\partial b_{yL_y} = \frac{b_{y0} - b_{yL_y}}{\Delta y}$$

$$\partial b_{yL_z} = \frac{b_{y0} - b_{yL_z}}{\Delta z}$$

$$\begin{aligned}\partial b_{ZR_x} &= \frac{b_{ZR_x} - b_{Z0}}{\Delta x} & \partial b_{ZL_x} &= \frac{b_{Z0} - b_{ZL_x}}{\Delta x} \\ \partial b_{ZR_y} &= \frac{b_{ZR_y} - b_{Z0}}{\Delta y} & \partial b_{ZL_y} &= \frac{b_{Z0} - b_{ZL_y}}{\Delta y} \\ \partial b_{ZR_z} &= \frac{b_{ZR_z} - b_{Z0}}{\Delta Z} & \partial b_{ZL_z} &= \frac{b_{Z0} - b_{ZL_z}}{\Delta Z}\end{aligned}$$

Zusätzlich sollen die Änderungen in beide Richtungen gleich sein:

$$\partial b_{XR_x} = \partial b_{XL_x}$$

$$\partial b_{XR_y} = \partial b_{XL_y}$$

$$\partial b_{XR_z} = \partial b_{XL_z}$$

$$\partial b_{YR_x} = \partial b_{YL_x}$$

$$\partial b_{YR_y} = \partial b_{YL_y}$$

$$\partial b_{YR_z} = \partial b_{YL_z}$$

$$\partial b_{ZR_x} = \partial b_{ZL_x}$$

$$\partial b_{ZR_y} = \partial b_{ZL_y}$$

$$\partial b_{ZR_z} = \partial b_{ZL_z}$$

Für die diskrete Betrachtung ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$F_x = \frac{b_{XR_x} - b_{X0}}{\Delta x} m_x + \frac{b_{XR_y} - b_{X0}}{\Delta y} m_y + \frac{b_{XR_z} - b_{X0}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_y = \frac{b_{YR_x} - b_{Y0}}{\Delta x} m_x + \frac{b_{YR_y} - b_{Y0}}{\Delta y} m_y + \frac{b_{YR_z} - b_{Y0}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_z = \frac{b_{ZR_x} - b_{Z0}}{\Delta x} m_x + \frac{b_{ZR_y} - b_{Z0}}{\Delta y} m_y + \frac{b_{ZR_z} - b_{Z0}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_x = \frac{b_{X0} - b_{XL_x}}{\Delta x} m_x + \frac{b_{X0} - b_{XL_y}}{\Delta y} m_y + \frac{b_{X0} - b_{XL_z}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_y = \frac{b_{Y0} - b_{YL_x}}{\Delta x} m_x + \frac{b_{Y0} - b_{YL_y}}{\Delta y} m_y + \frac{b_{Y0} - b_{YL_z}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_z = \frac{b_{Z0} - b_{ZL_x}}{\Delta x} m_x + \frac{b_{Z0} - b_{ZL_y}}{\Delta y} m_y + \frac{b_{Z0} - b_{ZL_z}}{\Delta Z} m_z$$

Die folgende Vereinfachung wird angenommen, da die Werte für m_x und m_y für das körperfeste und inertielle Koordinatensystem relativ klein sind. Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$F_x = \frac{b_{XR_z} - b_{X0}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_y = \frac{b_{YR_z} - b_{Y0}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_z = \frac{b_{ZR_z} - b_{Z0}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_x = \frac{b_{X0} - b_{XL_z}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_y = \frac{b_{Y0} - b_{YL_z}}{\Delta Z} m_z$$

$$F_z = \frac{b_{Z0} - b_{ZL_z}}{\Delta Z} m_z$$

So können für die sechs Nachbarpunkte die drei Komponenten bestimmt werden.

$$b_{XR_z} = \frac{F_x * \Delta Z}{m_z} + b_{x0}$$

$$b_{YR_z} = \frac{F_y * \Delta Z}{m_z} + b_{y0}$$

$$b_{ZR_z} = \frac{F_z * \Delta Z}{m_z} + b_{z0}$$

$$b_{XL_z} = -\frac{F_x * \Delta Z}{m_z} + b_{x0}$$

$$b_{YL_z} = -\frac{F_y * \Delta Z}{m_z} + b_{y0}$$

$$b_{ZL_z} = -\frac{F_z * \Delta Z}{m_z} + b_{z0}$$

Diese Betrachtung kann durch die Annahme erfolgen, dass die Symmetrieachse des Schwebezylinders parallel zur Z-Achse des inertialen Koordinatensystems schwebt. Für andere Schwebelagen muss das System erweitert betrachtet werden.

3.2.7.2 Berechnung der magnetischen Flussdichte zum gewünschten Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_y * B_z - m_z * B_y \\ m_z * B_x - m_x * B_z \\ m_x * B_y - m_y * B_x \end{bmatrix}$$

Für die Simulation wird das Moment M_z in Richtung der Rotationsachse nicht betrachtet. Ein Zylinder ist rotationssymmetrisch, daher kann dieses Moment vernachlässigt werden. Die Dipolmomente m_x und m_y werden mit dem Wert 0 Am^2 betrachtet.

Daraus folgt:

$$B_y = \frac{M_x}{-m_z}$$

$$B_x = \frac{M_y}{m_z}$$

Das Moment um die X- und Y-Achse soll möglichst 0 Nm betragen, sodass der Körper möglichst stabil schwebt. Daraus folgt, dass die X- und Y-Komponente der magnetischen Flussdichte im Bereich des Schwebekörpers möglichst 0 T betragen soll.

3.3 Simulation einer Regelung eines elementaren Dipolmagnetschwebeversuchs

Die Regelstrecke des Magnetschwebeversuchs ist nichtlinear und instabil. Um dieses Verhalten kontrollieren beziehungsweise regeln zu können, werden verschiedene Ansätze für die Reglerauslegungen untersucht und dargestellt. Anfangs wird die Regelung als Entwurf in einem Blockschaltbild beschrieben. Im ersten Ansatz wird eine analytisch vereinfachte Aufstellung der Differentialgleichungen und mögliche Ansätze zur Reglerauslegung vorgestellt. Aus dem Entwurfsmodell wird anschließend das Simulink-Modell entwickelt. Aus diesem Modell wird anhand einer Sprungantwort die Übertragungsfunktion der Strecke experimentell modelliert und linearisiert. Aus diesem Ergebnis wird die Reglerauslegung vorgenommen. Anschließend werden beide Systeme miteinander abgeglichen. Zum Schluss wird auf den realen Versuchsaufbau und dessen Probleme eingegangen.

In der Simulation wird ein Magnet mit Hilfe einer Spule, die durch Gleichstromfluss ein Magnetfeld erzeugt, zum Schweben gebracht. Die Positionserfassung des Magneten erfolgt über einen Hallsensor, der mittig an der unteren Stirnfläche der Spule positioniert ist. Das erzeugte Feld der Spule an der Sensorposition wird vor Inbetriebnahme des Systems für verschiedene Stromstärken aufgenommen. Später werden die Messwerte über einen LookUp-Table bereitgestellt. Da nun das erzeugte Feld für jeden notwendigen Spulenstrom bekannt ist, kann auf die magnetische Flussdichte, die vom Schwebemagneten verursacht wird, geschlossen werden. Der Schwebedipol wurde im Vorfeld ortsabhängig vermessen. So kann über einen LookUp-Table und Interpolation die Position bestimmt werden. Anhand der gemessenen Position beziehungsweise der Regeldifferenz lässt der Regler eine Kraft auf den Dipol durch Regulierung des Spulenstroms wirken. So kann die Sollposition des Schwebemagneten erreicht werden.

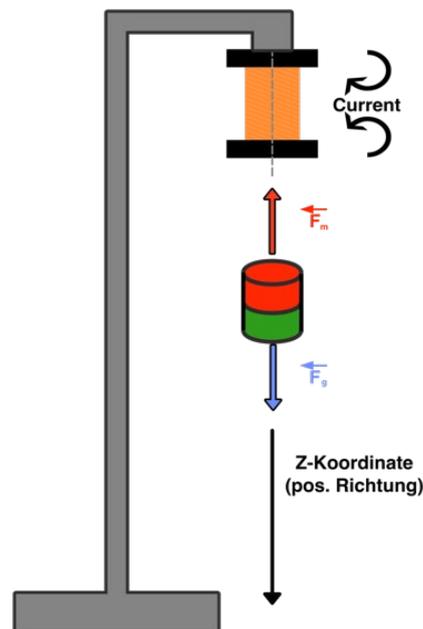


Abbildung 32 Schematischer Aufbau Magnetschwebeversuch

3.3.1 Entwurf des Simulationsmodells

Für die grundlegende Implementierung der simulierten Regelung in Simulink wurde folgender Entwurf entwickelt.

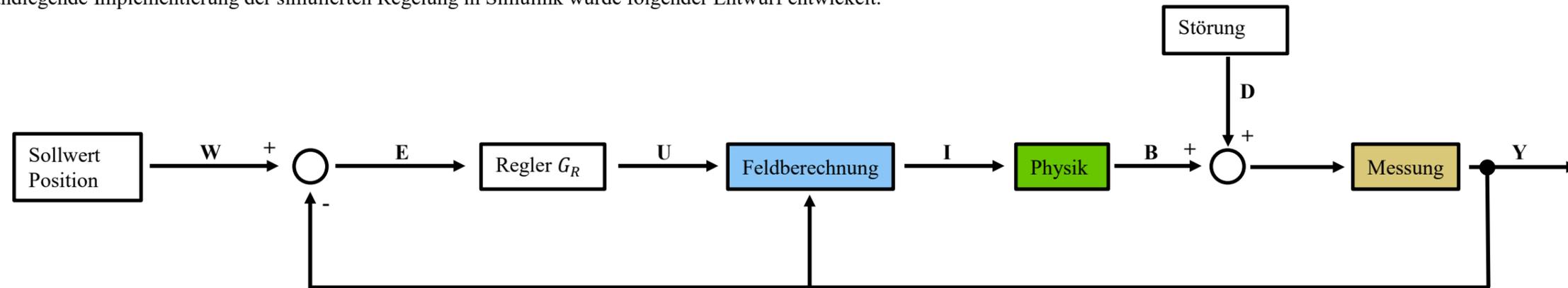


Abbildung 33 Entwurf des Regelkreises für das Simulationsmodell des umgekehrten Regelkreises

Variable Beschreibung

| | |
|-----|--|
| W | Beschreibt den Sollwert in der z-Koordinate |
| E | Regeldifferenz, das heißt die Abweichung zwischen Messung und Sollwert |
| U | Ausgabe des Reglers, gibt eine Kraft aus |
| I | Ausgabe der Feldberechnung, gibt einen Strom für die Spule aus |
| B | Die Strecke gibt die zwei magnetischen Flussdichten, die auf die Sensoren wirken aus |
| D | Simuliert die Störung der Messwerte der Sensoren |
| Y | Position in Bezug auf die z-Koordinaten, ermittelt durch die Sensorwerte |

Tabelle 25 Erklärung der Variablen des Entwurfs des Simulationsmodells

Mit der Vorgabe des Sollwerts wird ein Abstand zwischen dem unten angebrachten Hallsensor und dem Schwebemagneten vorgegeben. Im nächsten Schritt wird die Regeldifferenz zwischen der Mess- und Sollposition gebildet. Diese Differenz wird anschließend an den Regler weitergegeben. Der Reglerblock bestimmt dann die aufzubringende Kraft auf den Dipol im äußeren Feld, um die Abweichung auszugleichen. Für die vorgegebene Kraft berechnet der Block *Feldberechnung* die nötigen magnetischen Flussdichten an der aktuellen Position des Schwebemagneten. Die Position erhält der Block aus dem

Messsignal. Aus den benötigten Flussdichten wird dann auf Grundlage des Gesetzes von Biot-Savart der nötige Spulenstrom ermittelt. Dieser Stromwert wird dann an das Stellglied *Physik* weitergegeben. Dieser Funktionsblock simuliert auf Grundlage der physikalischen Modelle die reale Regelstrecke und deren Verhalten. In Bezug auf die Realität würde dieser Block mit der wirklichen Regelstrecke ausgetauscht werden. Anstatt dessen würde man hier die Sensoreingänge, Ausgänge und deren Konvertierungen implementieren. Im nächsten Schritt könnte man ein Rauschen oder einen Offset der Sensorwerte simulieren. Dazu werden die Störungen einfach auf die Messwerte

aufaddiert. Mit diesen Werten wird dann im Block der *Messung* die aktuelle Position des Dipols bestimmt. Dazu wurde im Vorfeld das erzeugte Feld der Spule an der Sensorposition in Bezug auf den Strom aufgenommen. Durch Bildung der Differenz des richtigen Messwerts und des vorab berechneten, kann man die magnetische Flussdichte, die der Dipol verursacht, ermitteln. Anschließend wird durch einen LookUp-Table anhand des berechneten Werts die aktuelle Position des Dipols bestimmt. Mit diesem Positionssignal schließt sich der Regelkreis.

3.3.2 Allgemeine analytische Modellierung

3.3.2.1 Beschreibung der Differentialgleichung

Die zu modellierende Regelstrecke des Schwebekörpers ist nichtlinear und instabil. Durch ein geeignetes mathematisches Modell soll hier die Reglerauslegung theoretisch dargestellt werden. Der Zusammenhang soll so stark vereinfacht werden wie möglich, jedoch muss die Strecke ausreichend beschrieben werden, um einen geeigneten Regler-Entwurf zu ermöglichen. Als Ausgangspunkt dienen grundlegende physikalische Gleichungen beziehungsweise die Axiome von Newton.

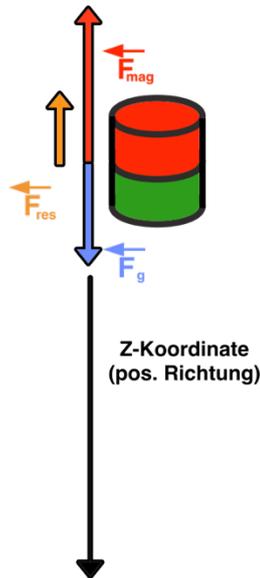


Abbildung 34 Kräftearstellung Magnetschweberversuch

$$F_{res} = F_{mag} - F_g$$

Mit dem zweiten Axiom von Newton:

$$F_{res} = m \cdot a = m \cdot \ddot{z}$$

$$m \cdot \ddot{z} = F_{mag} - F_g$$

Zerlegung der Kraft

$$F_{mag} = F_{hilf} + F_{steuer} = f(i_{steuer}, x)$$

Mit der Hilfskraft für einen bestimmten Punkt wird ein konstanter Strom festgelegt, der den Dipol an dieser Position in Schwebelage hält. Man kann diese Position als Arbeitspunkt bezeichnen. Um den Abstand zu variieren, wird ein lineareres Verhältnis zwischen Strom und Position angenommen. Dies vereinfacht die grundlegende Reglerauslegung.

$$m \cdot \ddot{x} = F_{mag} - F_g = f(i_{steuer}, x) - F_g$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|---------------|--|
| m | Masse des Schwebekörpers in [kg] |
| \ddot{z}, a | Beschleunigung in $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ |
| F_{mag} | Kraft durch Magnetfeld verursacht auf den Schwebekörper in [N] |
| F_g | Gewichtskraft in [N] |
| F_{res} | Resultierende Kraft in [N] |

Tabelle 26 Parametererklärung für Modellierung der physikalischen Regelstrecke

Unter diesen Bedingungen betrachtet man nur den Anteil, der zur Auslenkung des Dipols benötigt wird. So kann man die Positionsänderung mit einem Taylorpolynom erster Ordnung als Näherung beschreiben.

$$\Delta F_{mag} = \left. \frac{\delta f}{\delta i_{steuer}} \right|_{i_{steuer 0, z_0}} \cdot \Delta i_{steuer} \cdot \left. \frac{\delta f}{\delta z} \right|_{i_{steuer 0, x_0}} \cdot \Delta z$$

Durch die Eliminierung der Terme

$$f_i = \left. \frac{\delta f}{\delta i_{steuer}} \right|_{i_{steuer 0, z_0}} \quad \text{und} \quad f_z = \left. \frac{\delta f}{\delta z} \right|_{i_{steuer 0, z_0}}$$

und dem Weglassen der Beschreibung der Änderung von ΔF_{mag} erhält man folgenden Ausdruck.

$$m \cdot \ddot{z} = f_i \cdot i_{steuer} + f_z \cdot z$$

Durch Division der Masse m kann man folgende Substitution durchführen:

$$p = \frac{f_z}{m}$$

$$k = \frac{f_i}{m}$$

So erhält man folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{z} - p \cdot z = k \cdot i_{steuer}$$

Die Konstanten p und k beschreiben die Strecke und sind vor der Realisierung der Regelung zu bestimmen.

$$p \text{ in } \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$k \text{ in } \left[\frac{mA}{s^2} \right]$$

3.3.3 Aufstellen der Streckenübertragungsfunktion

Die Differentialgleichung wird in den Laplacebereich transformiert und anschließend in die Streckenübertragungsfunktion $G_S(s)$ umgeformt.

$$\ddot{z}(t) - p \cdot z(t) = k \cdot i_{steuer} \quad \Leftrightarrow \quad s^2 \cdot Z(s) - p \cdot Z(s) = k \cdot I(s)$$

$$\Rightarrow G_S(s) = \frac{Z(s)}{I(s)} = \frac{k}{s^2 - p}$$

Um die Stabilität des Systems zu beurteilen, werden die Polstellen in Hinblick auf den Parameter p bestimmt.

$$0 = s^2 - p$$

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{p}$$

Dies bedeutet, dass sich der Pol $+\sqrt{p}$ in der positiven s -Halbebene im Pol-Nullstellenbild befindet. Das führt zu einem instabilen Verhalten des Systems.

3.3.4 Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Die Stabilität für den Regelkreis wird für einen P- und PD-Regler untersucht. Dabei wird das Hurwitz-Kriterium auf das charakteristische Polynom angewandt. Dabei werden die Parameter p und k als bekannt vorausgesetzt. Dabei gilt:

$$p > 0 \text{ und } k > 0$$

Auch die Zeitkonstante T wird als bekannt vorausgesetzt.

$$T = 0.001 \text{ sec}$$

Die Zeitkonstante sollte so gewählt werden, dass der ideale Regleranteil so wenig wie möglich beeinflusst wird. T sollte so gewählt werden, dass er um den 100-fachen Faktor kleiner ist, als die Zeitkonstante im Zähler der Reglerübertragungsfunktion.

Um sicher zu gehen, dass sich der Regler im stabilen Bereich befindet, wurde das folgende Kriterium definiert:

$$P + \frac{D}{T_1} > \frac{p}{k}$$

3.3.5 Allgemeiner Ansatz

3.3.5.1 Führungsübertragungsfunktion

$$G_W(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}$$

Mit der Open-Loop-Übertragungsfunktion $G_O(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$ kann die Führungsübertragungsfunktion auch wie folgt beschrieben werden:

$$G_W(s) = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)}$$

3.3.5.2 Charakteristische Nennerpolynom

$$1 + G_O(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s^1 + a_0 \cdot s^0 = 0$$

- alle $a_i \neq 0$
- alle $a_i > 0$
- alle nord-westlichen Unterdeterminanten $\det(H_i)$ der Hurwitz-Matrix H müssen positives Vorzeichen aufweisen:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Für Systeme beziehungsweise Polynome bis zur zweiten Ordnung ist das Hurwitz-Kriterium b) ausreichend. Ab Systeme dritter Ordnung - wie beim PD-Regler - ist dies nicht mehr ausreichend.

3.3.6 Stabilitätsbetrachtung für den P-Regler

3.3.6.1 Reglerübertragungsfunktion

$$G_R(s) = G_P(s) = P$$

3.3.6.2 Bestimmung des charakteristischen Polynoms

$$1 + G_O(s) = 1 + G_P(s) \cdot G_S(s) = 1 + P \cdot \frac{k}{s^2 - p} = 0$$

$$s^2 - p + P \cdot k = 0$$

$$1 \cdot s^2 + 0 \cdot s^1 + (P \cdot k - p) \cdot s^0$$

Da der Koeffizient a_1 bei s^1 gleich null ist, ist das Hurwitz-Kriterium nicht erfüllt. Durch diese Gegebenheit kann ein P-Regler die Stabilität im geschlossenen Regelkreis nicht gewährleisten.

3.3.7 Stabilitätsbetrachtung für PD-Regler

3.3.7.1 Reglerübertragungsfunktion

$$G_R(s) = G_P(s) = P + \frac{D \cdot s}{1 + T_1 \cdot s}$$

$$1 + G_O(s) = 1 + G_{PD}(s) \cdot G_S(s) = 1 + \left(P + \frac{D \cdot s}{1 + T_1 \cdot s} \right) \cdot \left(\frac{k}{s^2 - p} \right) = 0$$

$$(1 + T_1 \cdot s) \cdot (s^2 - p) + k \cdot (P \cdot (1 + T_1 \cdot s) + D \cdot s) = 0$$

$$T_1 \cdot s^3 + 1 \cdot s^2 + (-T_1 \cdot p + T_1 \cdot P \cdot k + D \cdot k) \cdot s^1 + (-p + P \cdot k) \cdot s^0 = 0$$

$$\underbrace{1}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{\frac{1}{T_1}}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{\left(-p + P \cdot k + \frac{D \cdot k}{T_1} \right)}_{a_1} \cdot s^1 + \underbrace{\frac{-p + P \cdot k}{T_1}}_{a_0} \cdot s^0 = 0$$

$$a_3 = 1 > 0$$

$$a_2 = \frac{1}{T_1} > 0$$

$$a_1 = P \cdot k - p + \frac{D \cdot k}{T_1} > 0$$

Aufgrund des Hurwitz-Kriteriums $a_1 > 0$ muss also gelten:

$$P + \frac{D}{T_1} > \frac{p}{k}$$

Der kleinste Wert für P ergibt sich aus dem Kriterium für a_0 :

$$a_0 = \frac{-p + P \cdot k}{T_1} > 0$$

$$\Rightarrow P > \frac{p}{k}$$

Dieser Parameter wird beim Entwurf als erstes festgelegt.

Um mit dem Hurwitz-Kriterium die Stabilität des Regelkreises ausreichend zu beschreiben, muss die Determinante der Hurwitz-Matrix einen Wert größer null ergeben.

Folglich heißt das:

$$H_1 = a_1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0, \text{ d.h.}$$

$$a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 = \left(P \cdot k - p + \frac{D \cdot k}{T_1} \right) \cdot \frac{1}{T_1} - \frac{-p + P \cdot k}{T_1} \cdot 1 > 0$$

$$P \cdot k - p + \frac{D \cdot k}{T_1} + p - P \cdot k > 0$$

$$\Rightarrow D \cdot k > 0$$

Da aus der Definition heraus gilt: $k > 0$

Ergibt sich folgender Fakt:

$$D > 0$$

Allerdings folgt aus der Bedingung für a_1 bereits

$$P + \frac{D}{T_1} > \frac{p}{k}$$

Zusätzlich muss gelten:

$$P > \frac{p}{k}$$

Stellt man nun die hergeleiteten Gleichungen nachfolgendem Prinzip dar,

$$D > \underbrace{\left(\frac{p}{k} - P\right)}_{< 0 \text{ wegen } P > \frac{p}{k}} \cdot T_1$$

erkennt man, dass im Endeffekt

$$D > 0 > \left(\frac{p}{k} - P\right) \cdot T_1 \text{ gilt.}$$

Durch diese mathematische Darstellung wird klar, dass grundsätzlich gilt:

$$D > 0$$

3.3.8 Implementierung des Simulink-Modells

Das Simulink-Modell basiert grundlegend auf dem Modellentwurf (3.3.1).

Dabei baut der Block *Physik* auf den physikalischen Modellen der Magnetostatik und Mechanik auf. Er simuliert das Verhalten des Versuchsaufbaus und wird in Kapitel 3.4 mit der realen Strecke ersetzt.

Für Matlabfunction-Blöcke wurden die Funktionen zuerst in Matlab implementiert und getestet. Im Simulationsmodell werden die überprüften Funktionen an den entsprechenden Stellen aufgerufen. Die meisten Testbeschreibungen im folgenden Abschnitt beziehen sich also auf Funktionen, die in einem Skript in einem „Test-Case“ aufgerufen wurden. Einige Funktionen in dem Modell sind in ihrer Funktion elementar; hier wurde auf eine ausführliche Testbeschreibung verzichtet.

Die grundlegende Ansteuerung des Modells erfolgt über ein Skript. Hier werden alle Parameter und Messdatensätze definiert. So können schnell und einfach Werte geändert werden.

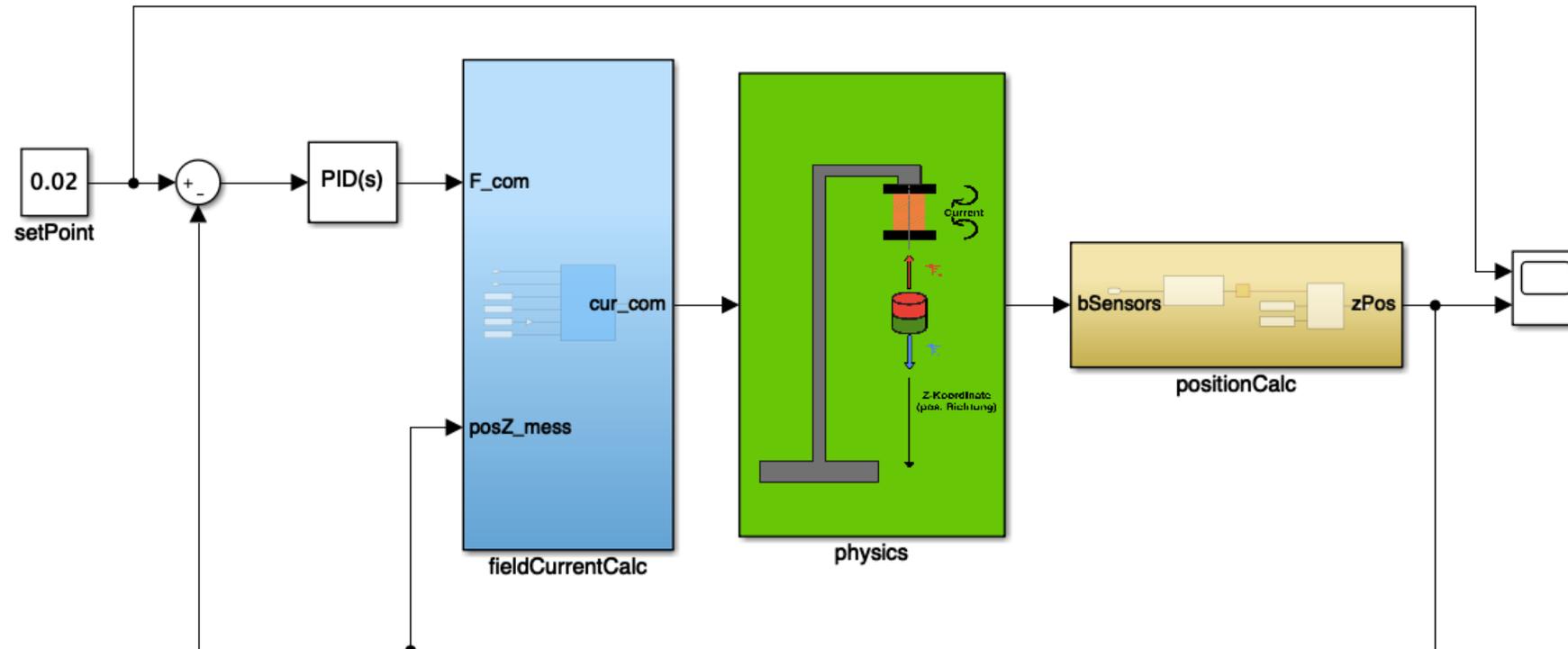


Abbildung 35 Simulationsmodell in Simulink für Magnetschwebesimulation (Spule-Dipol)

3.3.8.1 Sollwert- und Positionsvorgabe

In diesem Block wird die Position vorgegeben. Dabei ist zu beachten, dass sich die Positionsvorgabe im Bereich der für den Dipol aufgenommenen Messdaten befindet.

3.3.8.2 Feldberechnung

3.3.8.2.1 Aufbau

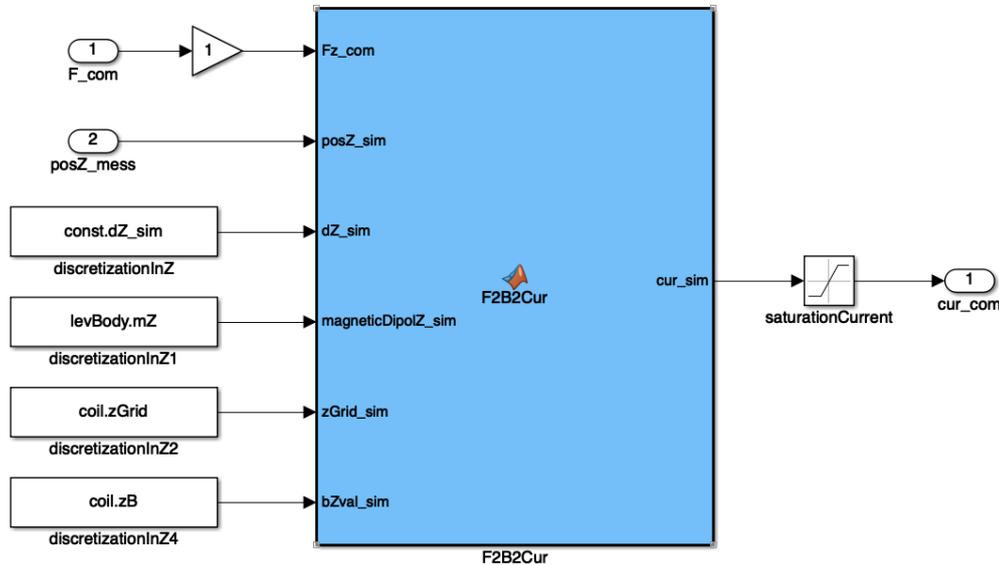


Abbildung 36 Feldberechnung des inversen Magnetschwebversuchs

Das Eingangssignal ist eine Kraftvorgabe vom Reglerausgang. Die Ausgabe kommandiert einen Strom für die Spule. Der kommandierte Strom wird auf der Grundlage des Verhaltens eines Dipols im äußeren Feld berechnet. Dazu ist die aktuelle Position in Z-Richtung aus der Rückführung notwendig. So kann für die aktuelle Position des Schwebekörpers eine definierte Kraft vorgegeben werden. Als Basis wird hierfür eine generierte Datenreihe, die das Verhalten der magnetischen Flussdichte der Spule für ein Ampere beschreibt, verwendet. Da sich der Strom der Spule proportional zur magnetischen Flussdichte verhält, kann der benötigte Strom durch einfache Dreisatzrechnung berechnet werden. Dabei muss die normierte Datenreihe in Vorarbeit für das Feld in der Z-Komponente für die Spule nach dem Gesetz von Biot-Savart ermittelt werden. Ebenso wäre es möglich einen Datensatz zu verwenden, der aus einer realen Messung stammt. Am Ende der Berechnung gibt der Block an das Stellglied einen Stromwert cur_{sim} weiter. Dieser wurde mit Hilfe eines Saturation-Blocks beschränkt. Anhand der geplanten Stromquelle müssen die Grenzen ausgewählt werden. In der Simulation wurde ein Strombereich von -2 bis 2 Ampere aufgrund der Kenndaten des vorhandenen Labornetzgerätes gewählt.

3.3.8.2.2 Test

Um die Funktion zu überprüfen, wurde ein entsprechender Datensatz der Variablen in einem Skript sinnvoll definiert. Die Funktion wurde mit diesen Variablen aufgerufen und ein Stellstrom wurde zurückgegeben. An der vorgegebenen Position des Schwebemagneten wurden anhand der Diskretisierung drei normierte magnetische Flussdichten durch Interpolation bestimmt. Diese wurden mit dem zuvor berechneten Stromwert multipliziert. Als letzten Schritt wurde in beide Richtungen der Diskretisierung die Kraft berechnet und daraus der Mittelwert gebildet. Die vorgegebene Kraft muss am Ende gleich der berechneten sein.

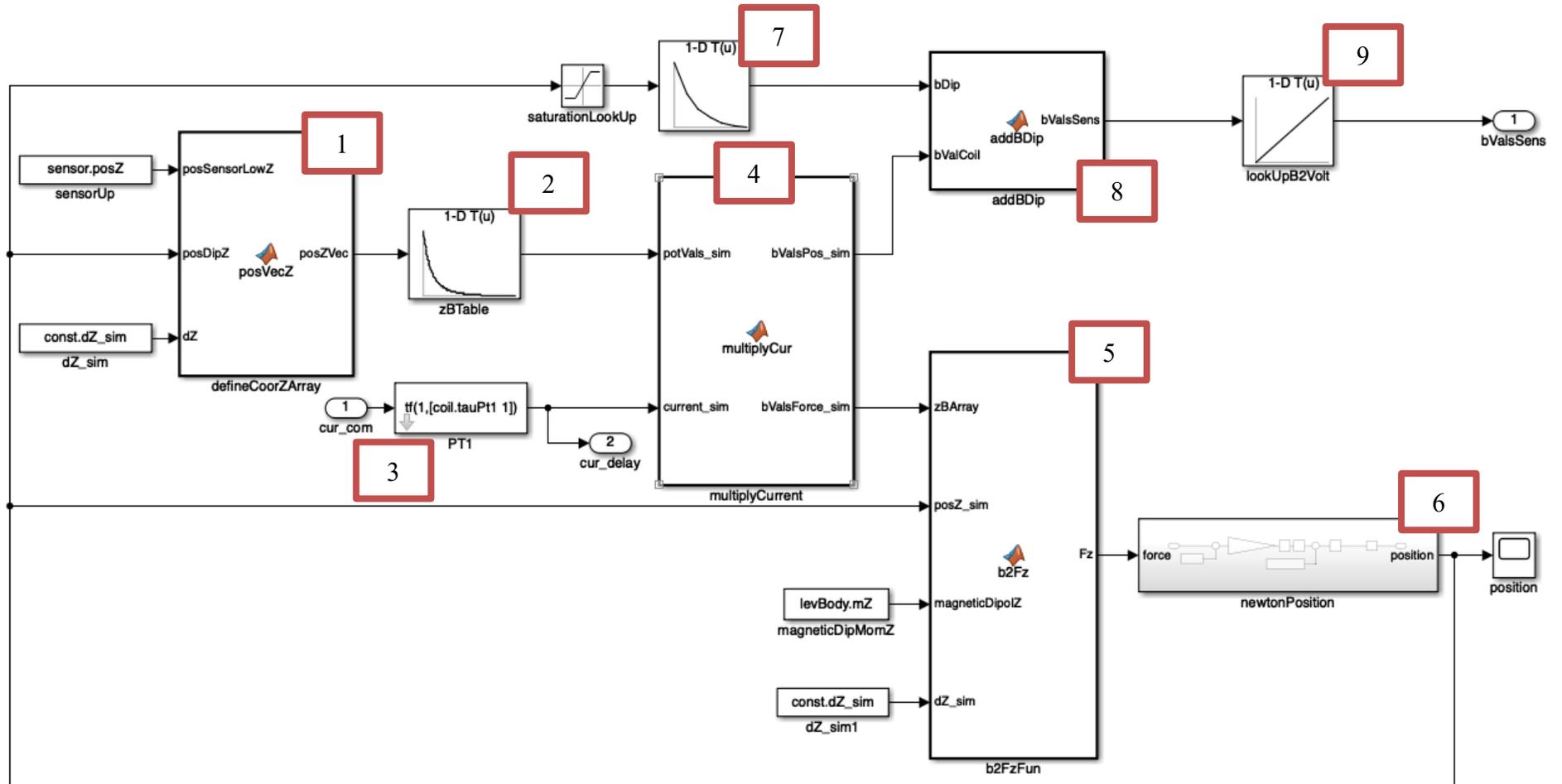


Abbildung 38 Physikalisches Modell des Magnetschwebversuchs

3.3.8.3.1 Magnetische Flussdichtenberechnung für definierte Punkte (1)

Die magnetische Flussdichte in Z-Richtung muss für verschiedene Punkte zur Simulation berechnet werden. Hierfür wird ein Array mit vier Werten definiert. Hierzu gehört der Punkt, an dem der Sensor sitzt, und die drei magnetischen Flussdichten in Z-Richtung, die an der aktuellen Position des Dipols zur Kraftberechnung benötigt werden.

```
function posZVec = posVecZ(posSensorLowZ,posDipZ,dZ)
```

```
posZVec = zeros(4,1);
```

```
posZVec(1,1) = posSensorLowZ;
```

```
posZVec(2,1) = posDipZ+dZ;
```

```
posZVec(3,1) = posDipZ;
```

```
posZVec(4,1) = posDipZ-dZ;
```

```
end
```

3.3.8.3.1 LookUp-Table mit normierten magnetischen Flussdichten für die Spule (2)

Unterhalb der Spule wurde für eine Stromstärke auf der Rotationsachse die magnetische Flussdichte über einen bestimmten Bereich durch das Gesetz von Biot-Savart berechnet. Es wäre auch möglich, aufgenommene Messdaten zu verwenden. Die zuvor berechneten Positionspunkte werden übergeben. Anschließend wird durch lineare Interpolation anhand des erzeugten Messdatensatz auf die jeweiligen Flussdichten geschlossen.

3.3.8.3.1 Darstellung des PT1-Verhaltens durch ein LTI-System (3)

Eine Spule stellt einen einfachen Energiespeicher dar. Dieser kann durch das Verhalten eines PT1-Gliedes dargestellt werden. Durch die physikalische Ermittlung der Zeitkonstante der Spule kann mit Hilfe dieses Gliedes der reale verzögerte Stromfluss simuliert werden. Die Variable *cur_com* gibt dabei den kommandierten Strom aus der Feldberechnung vor.

3.3.8.3.2 Multiplikation des Stroms für die zu berechnenden magnetischen Flussdichten für definierte Punkte (4)

Um die stromabhängigen Flussdichten zu ermitteln, werden die zuvor ermittelten normierten magnetischen Flussdichten mit dem verzögerten Strom vom PT1-Glied jeweils multipliziert. Am Ende der Funktion werden die magnetischen Flussdichten in zwei Teile aufgespalten. Ein Wert ist für die Positionsbestimmung des Dipols und die anderen drei für die Kraftberechnung notwendig.

3.3.8.3.3 Kraftwirkung auf den Schwebemagneten im Feld (5)

Die ermittelten magnetischen Flussdichten an der Position des Schwebekörpers werden an den Block *b2FzFun* übergeben. Mit dem vorgegebenen magnetischen Dipolmoment *levBody.mZ*, der aktuellen Position des Dipols *posZ_sim* und der Diskretisierungsschrittweite *const.dZ_sim* kann nun die Kraftwirkung, wie im vorhergehenden Kapitel (3.2.7) beschrieben ist, berechnet werden.

3.3.8.3.4 Positionsbestimmung aus der Kraftwirkung auf den Dipol (6)

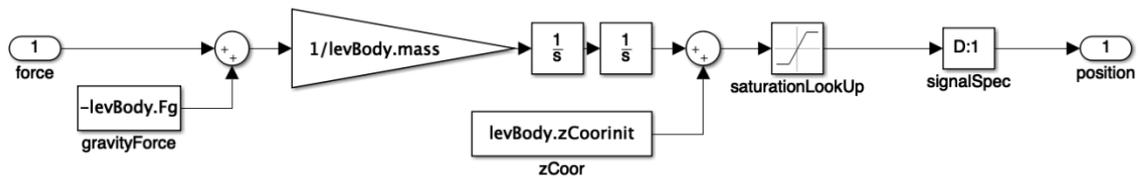


Abbildung 39 Positionsberechnung des Dipols im physikalischen Modell

Die berechnete Kraft, die aus dem äußeren Feld auf den Dipol wirkt, wird direkt mit der Gewichtskraft des Schwebemagneten subtrahiert. Daraus entsteht die resultierende Kraft, die auf den Schwebekörper wirkt.

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_{mag} - \vec{F}_g$$

Durch Multiplikation mit dem Kehrwert der Masse des Schwebekörpers kann nach dem zweiten Axiom von Newton die Beschleunigung des betrachteten Körpers berechnet werden. Die anschließende doppelte Integration führt zur aktuellen Position des Körpers. Zusätzlich wird durch einfache Summation eines Startpunkts des Schwebekörpers die Einstiegsposition simuliert.

3.3.8.3.5 Berechnung der magnetischen Flussdichte für die Sensoren in Bezug auf der aktuellen Dipolposition (7, 8)

Aus der Kraftwirkung berechneten Position kann nun über einen LookUp Table die wirkende magnetische Flussdichte auf den Sensor berechnet werden. Diese Kennlinie wurde in der Vorarbeit aufgenommen. Dieser interpolierte Wert kann nun auf die simulierte Messung des Sensors einfach aufaddiert werden. Der Block *saturationLookUp* begrenzt dabei die Position des Dipols, sodass keine unrealistischen Werte durch Extrapolation entstehen können. Die Begrenzung richtet sich nach den in Vorarbeit aufgenommenen Messwerten und die zugehörigen Ortsvektoren. So können später die Werte aus der Simulation der Regelstrecke und der richtigen Messung besser verglichen werden.

3.3.8.3.1 LookUp-Table Konvertierung der magnetischen Flussdichte in entsprechende Messspannung des Sensors (9)

Aus der berechneten Feldstärke, die auf den Sensor wirkt, wird anhand des Datenblatts die ausgegebene Spannung berechnet. Dieser Zusammenhang ist linear und wird deshalb einfach in einem LookUp-Table implementiert.

3.3.8.4 Positionsbestimmung des Dipols mit Hilfe von real aufgenommenen Messdaten

An dieser Stelle wird aufgrund der simulierten magnetischen Flussdichten die Position des Schwebemagneten berechnet. Dieser Block müsste in der Realität genauso bestehen. In dem Matlabfunctionblock *determineBDip* werden die beiden magnetischen Flussdichten voneinander abgezogen. Ein Wert bezieht sich auf den Sensor und der andere wird durch den LookUp-Table *lookUpCur2B* ermittelt. Diese Daten werden vor der Simulation separat erzeugt. In der Realität könnte hier auch eine Messreihe aufgenommen werden. So ergibt sich die magnetische Flussdichte, die von dem Schwebedipol auf den unteren Sensor ausgeht. Anschließend kann durch die aufgenommenen Messwerte aus der Vorarbeit auf die Position geschlossen werden. Die Messpunkte werden durch *levBody.zB* (magnetische Flussdichte) und *levBody.zGrid* (Position) in den Block *lookUp* übergeben und anschließend über eine Art LookUp-Table interpoliert. Der Block *lookUpVolt2B* wandelt das erzeugte Spannungsmesssignal in einen magnetischen

Flussdichtenwert um. Der Block *saturate* begrenzt die Ausgabe der magnetischen Flussdichte des Dipols, da für die Positionsbestimmung nur ein gewisser Bereich aus den Messungen vorhanden ist.

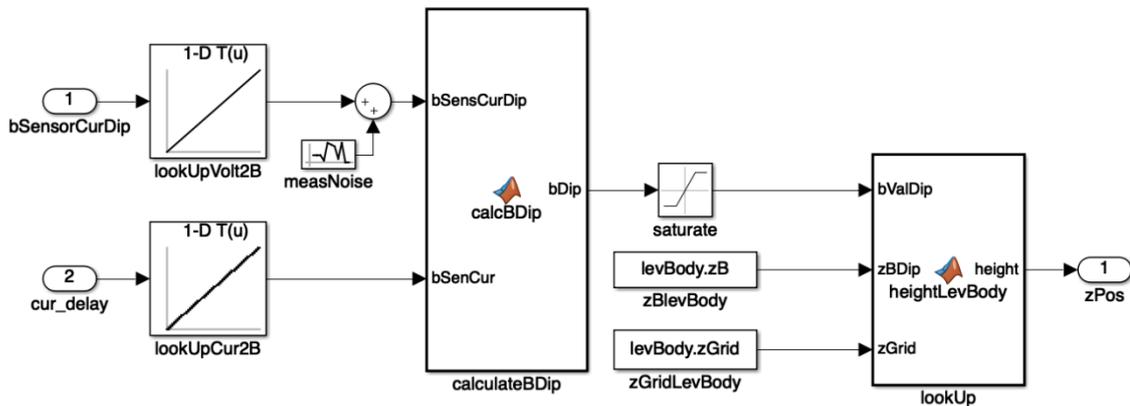


Abbildung 40 Modellierung der Positionsbestimmung des Dipols

3.3.9 Streckenidentifikation und Regler Auslegung

3.3.9.1 Aufnahme der Sprungantwort

An der Stelle des Reglers wird der Regelstrecke eine Kraft von 0,022 N kommandiert. Der Probemagnet hat eine Masse von 1,8 Gramm. Folglich hebt der Magnet ab und die Position wird anhand der simulierten Positionserfassung aufgenommen. Die Sprungantwort zeigt ein nichtlineares Verhalten.

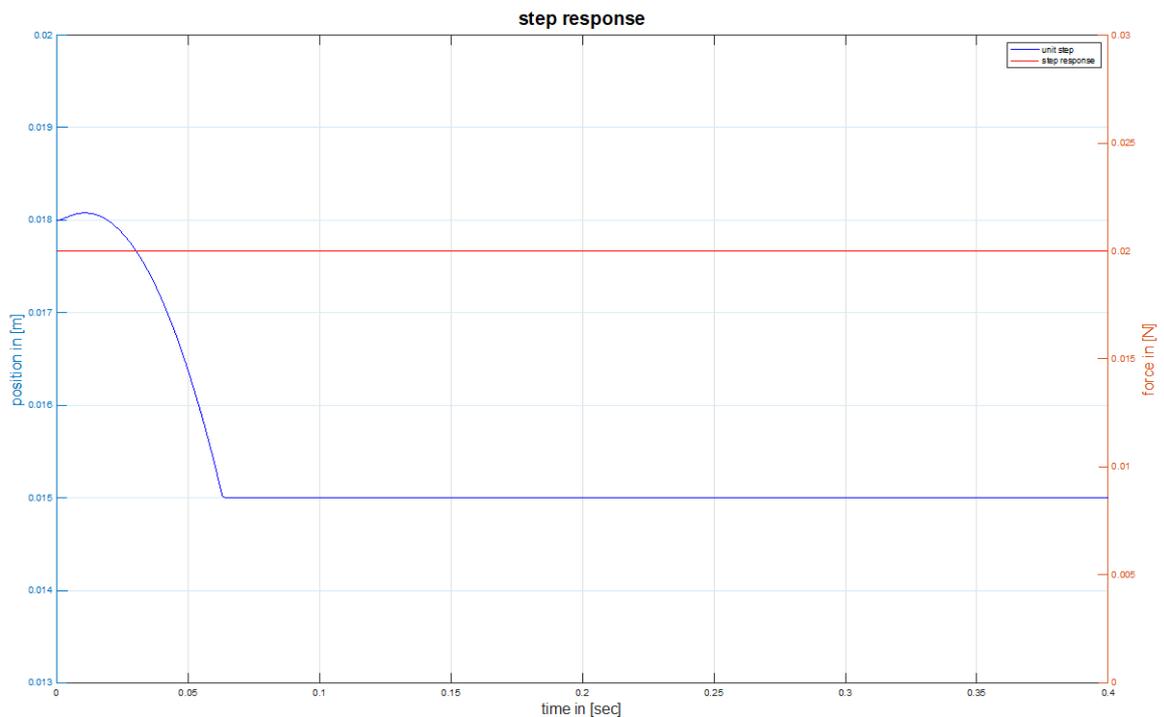


Abbildung 41 Sprungantwort des nichtlinearen Modells - Position und Kraft

3.3.9.2 Experimentelle Modellbildung mit Ein- und Ausgangsdaten

Für die experimentelle Modellbildung wird der Bereich, in dem sich die Position ändert, verwendet (0 bis 0,06 Sekunden). Dazu werden in eine Matrix die Zeit, die Stellgröße und die Position exportiert. Diese Daten werden in pzMove importiert. Das Software-tool pzMove ist ein Tool für Regelungstechnik und experimentelle Modellbildung. Es basiert auf der Methode der kleinsten Quadrate. Im Grunde erzeugt es aus einem Ein- und Ausgangssignal eines willkürlichen Systems eine Übertragungsfunktion. Diese Funktion kann anschließend für die Reglerauslegung und Systemanalyse genutzt werden. In folgendem Artikel wird dieses Verfahren erklärt und Beispiele dazu dargestellt. Außerdem können die Anfangsbedingungen mitgeschätzt werden. Diese können später zum Abgleich der Systeme genutzt werden ([Ein neues Verfahren zur Modellierung linearer Systeme](#) [15]).

Mit Hilfe dieser Methodik wurde für das System die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{-295,63}{s^2 - 0,15222 * s - 210,43}$$

errechnet.

In folgendes Diagramm wurde die Sprungantwort des nichtlinearen Simulink-Modells und der vorherigen Übertragungsfunktion mit Anfangswert aufgenommen und geplottet. Man erkennt eine kleine Abweichung zwischen den beiden Systemen. Allerdings sollte die experimentell erzeugte Übertragungsfunktion für die Auslegung des Reglers reichen.

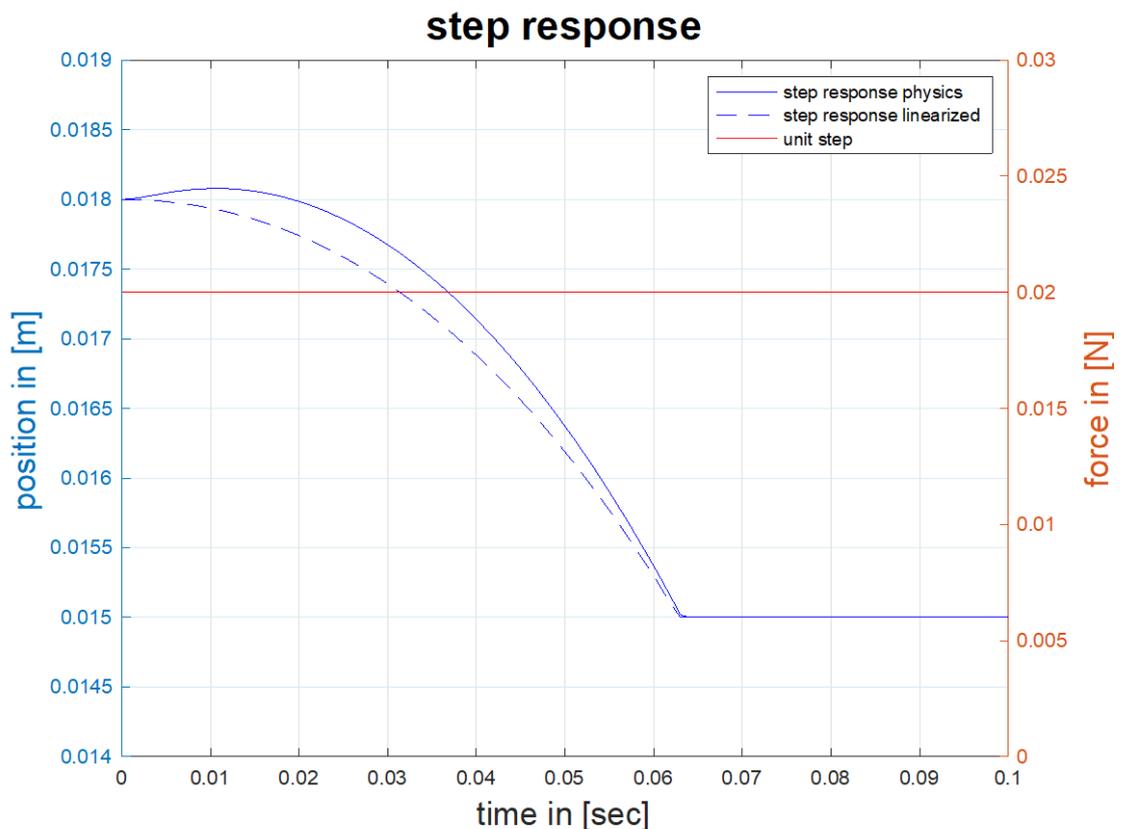


Abbildung 42 Vergleich des literarisierten zum physikalischen nichtlinearen Simulationsmodell

Wie in Abschnitt 3.3.3 dargestellt ist, besitzt die Übertragungsfunktion zwei Polstellen. Eine befindet sich in der negativen und die Andere in der positiven Halbebene im Pol-

Nullstellenbild. Die Polstellen berechnen sich aus dem charakteristischen Nennerpolynom:

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 - 0,15222 * s - 210,43 \\ s_1 &= +14,583 \\ s_2 &= -14,43 \end{aligned}$$

Diese Übertragungsfunktion ähnelt in ihrer Form der in Abschnitt 3.3.3 aufgestellten vereinfachten Gleichung. Die beiden Polstellen sind relativ symmetrisch zur imaginären Achse im Pol-Nullstellenbild und haben keinen Imaginärteil. Eine liegt in der positiven Halbebene, was auf ein instabiles Verhalten hindeutet. Außerdem besitzen beide Übertragungsfunktionen keine Nullstelle. Der einzige Unterschied besteht darin, dass ein Koeffizient mehr vorhanden ist. Im weiteren Verlauf wird nur die experimentelle Übertragungsfunktion betrachtet. Durch die Ähnlichkeit der beiden Funktionen werden die allgemeinen Vorgehensweisen und Berechnungen bestätigt.

3.3.10 Auslegung des Reglers

Als Reglerübertragungsfunktion für den PID-Regler wird die realisierbare, kontinuierliche Form gewählt.

$$G_R(s) = P + \frac{I}{s} + \frac{D * s}{T * s + 1}$$

Für die Zeitkonstante des D-Anteils wird

$$T = 0.002$$

gewählt. Diese Zeitkonstante muss etwas größer sein als die Sampletime des späteren Modells. Jedoch sollte sie möglichst klein sein. Dies entspricht dann einen Filterkoeffizienten von 500. Im nächsten Schritt wird das charakteristische Polynom des Systems betrachtet.

$$\begin{aligned} 1 + G_O(s) &= 1 + G_R(s) \cdot G_S(s) = 0 \\ 1 + \left(P + \frac{I}{s} + \frac{D * s}{T * s + 1} \right) * \left(\frac{-295,63}{s^2 - 0,15222 * s - 210,43} \right) &= 0 \\ 1 + \left(P + \frac{I}{s} + \frac{D * s}{0,002 * s + 1} \right) * \left(\frac{-295,63}{s^2 - 0,15222 * s - 210,43} \right) &= 0 \\ 1 + \left(\frac{-295,63 * P}{s^2 - 0,15222 * s - 210,43} \right) + \left(\frac{-295,63 * I}{s^2 - 0,15222 * s - 210,43 * s * \frac{1}{s}} \right) & \\ + \left(\frac{-295,63}{s^2 - 0,15222 * s - 210,43} * \frac{D * s}{0,002 * s + 1} \right) &= 0 \\ s^2 - 0,15222 * s - 210,43 - 295,63 * P - \frac{295,63 * I}{s} - \frac{295,63 * D * s}{0,002 * s + 1} &= 0 \\ s^3 - 0,15222 * s^2 - 210,43 * s - 295,63 * P * s - 295,63 * I - \frac{295,63 * D * s^2}{0,002 * s + 1} &= 0 \\ 0,002 * s^4 + s^3 - 0,00034 * s^3 - 0,1522 * s^2 - 0,42086 * s^2 - 210,43 * s & \\ - 0,59126 * P * s^2 - 295,63 * P * s - 0,59126 * I * s - 295,63 * I & \\ - 295,63 * D * s^2 &= 0 \\ 0,002 * s^4 + s^3 * (0,9996956) + s^2 * (-0,57306 - 0,59126 * P - 295,63 * D) + s & \\ * (-295,63 * P - 0,59126 * I) + s^0 * (-295,63 * I) & \end{aligned}$$

Koeffizienten des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} a_0 &:= -295,63 * I \\ a_1 &:= -295,63 * P - 0,59126 * I \\ a_2 &:= -0,57306 - 0,59126 * P - 295,63 * D \\ a_3 &:= 0,9996956 \\ a_4 &:= 0,002 \end{aligned}$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium müssen alle Koeffizienten $a_n > 0$ sein, um ein stabiles Verhalten zu gewährleisten.

$$a_3; a_4 > 0$$

Für folgende Koeffizienten gilt:

$$a_0 := -295,63 * I \\ I < 0$$

$$a_1 := -295,63 * P - 0,59126 * I \\ P < 0$$

$$a_2 := -0,57306 - 0,59126 * P - 295,63 * D \\ D < 0$$

Außerdem müssen alle führenden Hauptabschnittsdeterminanten der Hurwitz-Matrix größer null sein.

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$a_1 * a_2 - a_0 * a_3 > 0$$

$$(-295,63 * P - 0,59126 * I) * (-0,57306 - 0,59126 * P - 295,63 * D) \\ - (-295,63 * I) * (0,9996956) > 0$$

Da a_3 und a_4 positiv sind, reicht es, nur diese Determinante und a_1 zu betrachten.

Da in der Gleichung 3 Parameter frei wählbar sind, ist es schwierig die Regelparameter zu definieren. Aber es kann überprüft werden, ob das System für gewählte Parameter stabil ist. Die Reglerparameter wurden auf Grundlage von pzMove ausgelegt.

$$P = -30; I = -100; D = -0.7$$

Durch Einsetzen in die Gleichung ergibt sich:

$$2030328,549 > 0$$

Für die gewählten Parameter ist das System stabil.

Diese Parameter werden in das Simulationsmodell eingesetzt. Zum Vergleich werden das physikalische Modell und die berechnete Übertragungsfunktion parallel simuliert. Im physikalischen Modell wird eine Strombegrenzung von -2 bis 2 Ampere, die im realen Fall von der Dimensionierung des Netzteils abhängt, simuliert.

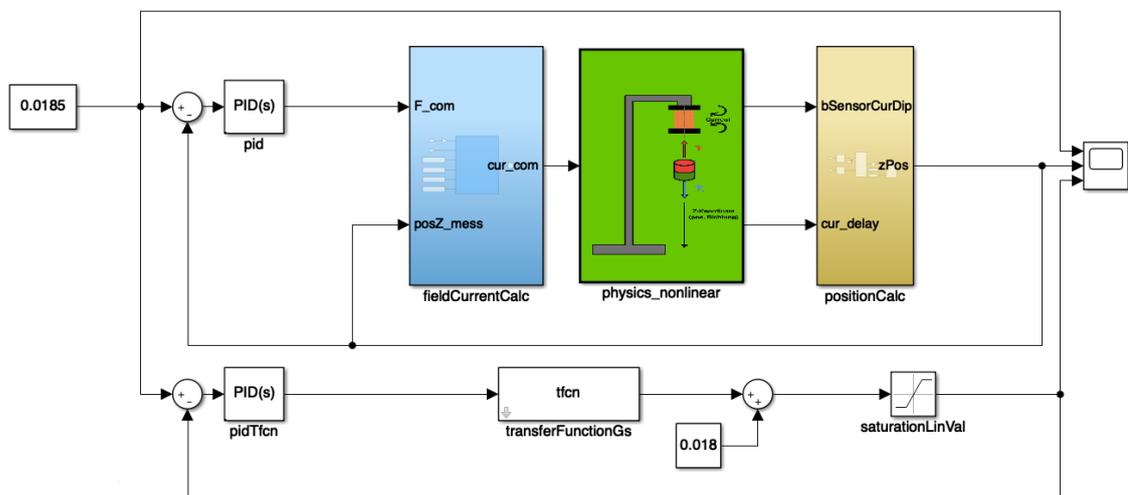


Abbildung 43 Experimentelles im Vergleich zum physikalischen Simulationsmodell

In folgendem Plot ist zu erkennen, dass das System, das über die Übertragungsfunktion simuliert wird, schneller einschwingt. Dies erklärt sich aus der beschränkten Stromstärke im physikalischen Modell. Durch die Einschränkung kann nur eine geringere Kraft beziehungsweise die darauffolgende Beschleunigung auf den Dipol wirken. Alle anderen Parameter wie die Startposition sind annähernd gleich. Eine Verbesserung würde hier ein Kern zur Erzeugung einer höheren magnetischen Flussdichtenänderung in der Spule ermöglichen. Jedoch ist in diesem Fall die magnetische Anziehung zwischen Dipol und dem magnetischen Werkstoff zu berücksichtigen. In diesem Simulationsbeispiel wurde deshalb eine Spule ohne Kern betrachtet. Eine weitere Möglichkeit würde eine stärkere Stromquelle bieten, wobei aber eine Kühlung der Spule stattfinden müsste.

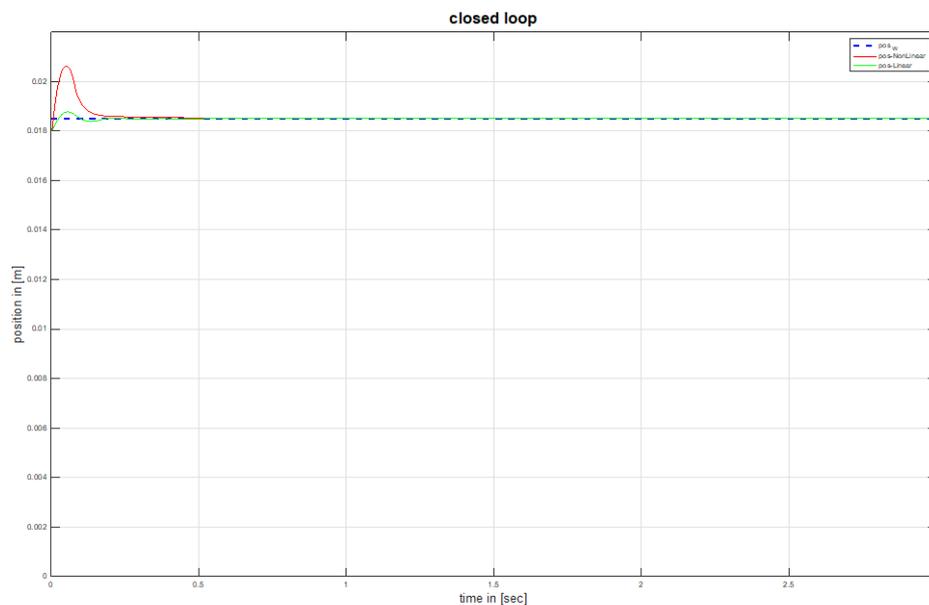


Abbildung 44 Position im geschlossenen Regelkreis - Linearisiertes gegen physikalisches Simulationsmodell

3.4 Realer Versuchsaufbau

3.4.1 Aufbau der Regelstrecke

3.4.1.1 Allgemeiner Aufbau

Grundlegend besteht das System aus einer Spannungsquelle (zwei in Reihe geschaltete Labornetzgeräte mit Massebezug) und der einstellbaren Konstantstromquelle (in folgender Abbildung mit „Amp“ gekennzeichnet), die in Kapitel 3.4.1.2 beschrieben ist. Die Ansteuerung der Stromquelle und das Einlesen des Hallsensors erfolgt über eine Messkarte in einem Rechner. Der Regelalgorithmus ist in Simulink implementiert, wobei die Ein- und Ausgänge der Messkarte direkt eingelesen beziehungsweise angesteuert werden und in Echtzeit verwendet werden können. Die Spule ist an einem kleinen Galgen befestigt und an der Unterseite der Spule befindet sich ein eindimensionaler Hallsensor, der für die Positionserfassung des Schwebedipols notwendig ist. Als Schwebekörper wird ein kleiner Neodymmagnet verwendet, der im Vorfeld schon in einem gewissen Messbereich in einem Raster vermessen wurde.

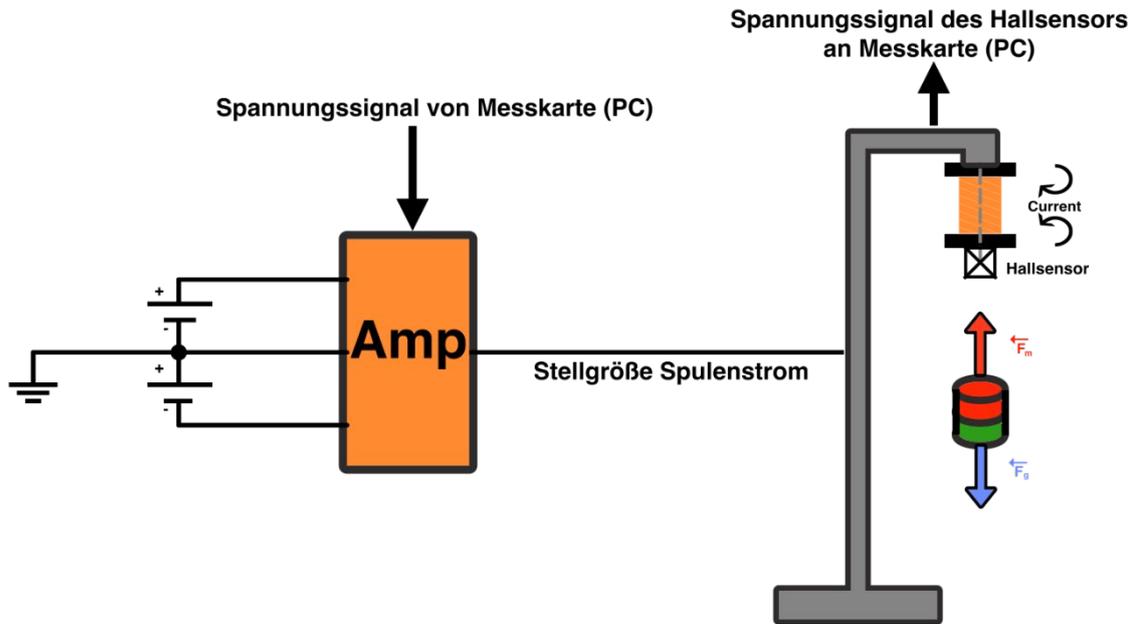


Abbildung 45 Versuchsaufbau zur Realisierung des inversen Magnetschwebversuch

3.4.1.2 Einstellbare Konstantstromquelle der Spule

Durch die Spule soll unabhängig von ihrem ohmschen Widerstand ein definierter Strom fließen. Dazu wurde eine Operationsverstärkerschaltung auf einer Platine gefertigt. Als Herzstück wurde der Leistungsoperationsverstärker OPA541AP verwendet. Durch eine Vorgabe einer Spannung mittels der Messkarte im Rechner fließt ein konstanter Strom. In dieser Schaltung entspricht eine Vorgabe von einem Volt gleich einem Ampere auf der Lastseite. Anhand einer einer folgender Beispielrechnung wird die Funktion erklärt.

Differenzspannung zwischen invertierenden und nicht invertierenden Eingang:

$$U_d = 0 \text{ V}$$

Eingangswiderstände

$$R_{in} = \infty \Omega$$

Eingangsspannung

$$U_e = 1 \text{ V}$$

Parallelschaltung der Widerstände R_3 und R_4

$$R_{34} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{18 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{18 \text{ k}\Omega} \right)^{-1} = 9 \text{ k}\Omega$$

Gesamtwiderstand

$$R_{342} = R_{34} + R_2 = 9 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega = 10 \text{ k}\Omega$$

Strom am Spannungsteiler

$$I_{342} = \frac{U_e}{R_{342}} = \frac{1 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 0,1 \text{ mA}$$

Abfallende Spannung am Spannungsteiler

$$U_{34} = R_{34} * I_{342} = 9 \text{ k}\Omega * 0,1 \text{ mA} = 0,9 \text{ V}$$

$$U_2 = R_2 * I_{342} = 1 \text{ k}\Omega * 0,1 \text{ mA} = 0,1 \text{ V}$$

Eingangsspannung am nichtinvertierenden Eingang beträgt also 0,1 V

Durch die Rückkopplung versucht der Operationsverstärker die Spannungsdifferenz auszugleichen. Dies ist nur möglich über einen Stromfluss über R_1 .

$$I_1 = \frac{U_2}{R_1} = \frac{0,1 \text{ V}}{0,1 \Omega} = 1 \text{ A}$$

An den Ausgangsklemmen *RND 205-00012* wird die Spule beziehungsweise die Last angehängt. Diese beeinflusst den vorgegebenen Stromfluss aber nicht.

Durch diese Schaltung kann ein definierter Strom durch eine Spannung im Verhältnis 1:1 vorgegeben werden. Die Bauteilwahl erfolgte aufgrund der Lagerbestände in der Technischen Hochschule Rosenheim. Die Schaltung soll mit einer maximalen Stromstärke von -2 bis 2 Ampere betrieben werden. Die Dimensionierung der Bauteile wurde dabei durch Datenblätter überprüft.

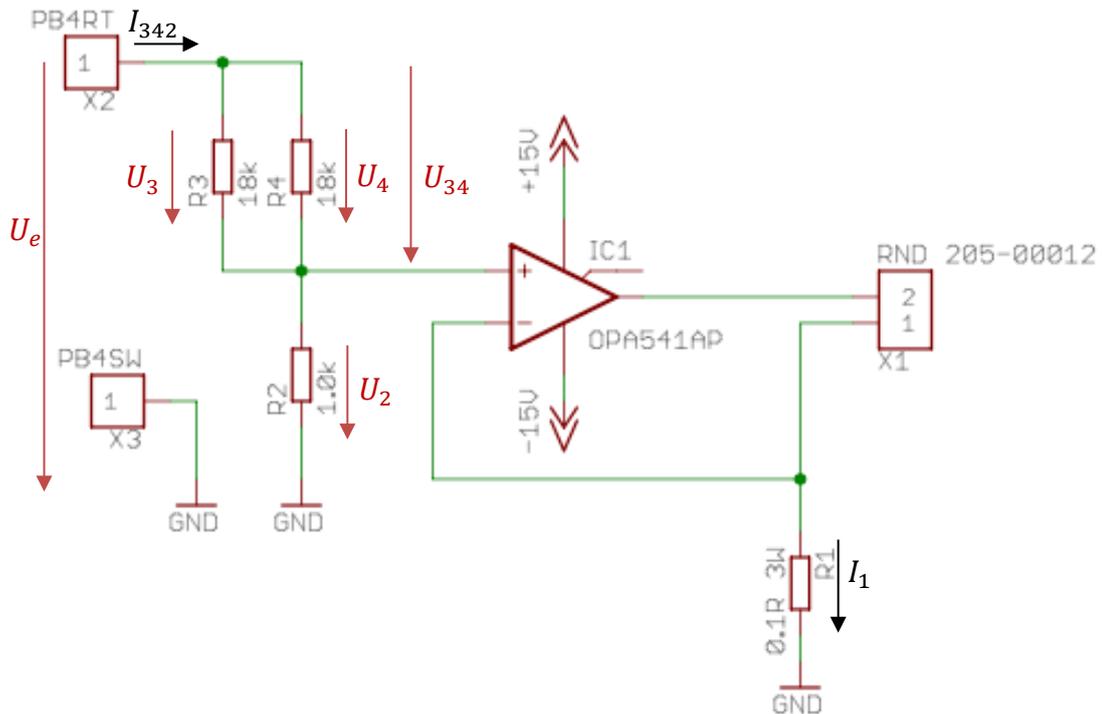


Abbildung 46 OPV-Schaltung zur definierten Bestromung der Spule

3.4.1.3 Spule

In dem Versuch wurde eine Spule ($2,2 \Omega$, $4,2 \text{ mH}$) ohne Kern von der Firma Visaton (Datenblatt siehe Anhang) verwendet. Das erzeugte Feld dieser Spule kann auch abhängig vom Strom nach dem Gesetz von Biot-Savart simuliert werden (Abschnitt 3.2.1.2).

3.4.1.4 Positionserfassung

Die Positionserfassung des Schwebedipols wurde wie in der Simulation implementiert (3.3.8.4). Theoretisch könnte man sich auch für zwei Sensoren entscheiden. Einer würde wie im Versuch an der unteren Stirnseite der Spule befestigt. Der Zweite würde an der oberen Stirnseite der Spule befestigt werden. Aus den beiden Sensorwerte würde man dann die Differenz bilden und daraus dann auf die Position des Dipols schließen. In diesem Fall wurde sich für einen Sensor entschieden, da die Sensoren exakt an gleicher Stelle entgegengesetzt positioniert hätten werden müssen. Außerdem wirkt das Feld des Schwebemagneten ebenso zu geringen Teilen auf den zweiten Sensor. Dies erschwert die Positionsbestimmung, da der Schwebedipol in so einem großen Feld nicht vermessen wurde. So wurde vor der Inbetriebnahme über Stromwerte von -2 bis 2 Ampere die magnetische Flussdichte aufgenommen und im Simulink-Modell im Teil der Positionserfassung über einen LookUp-Table hinterlegt. Dadurch kann der zweite notwendige Sensor durch den kommandierten Strom und unter Berücksichtigung der Zeitkonstante der Spule simuliert werden.

3.4.1.5 Modell der Regelstrecke

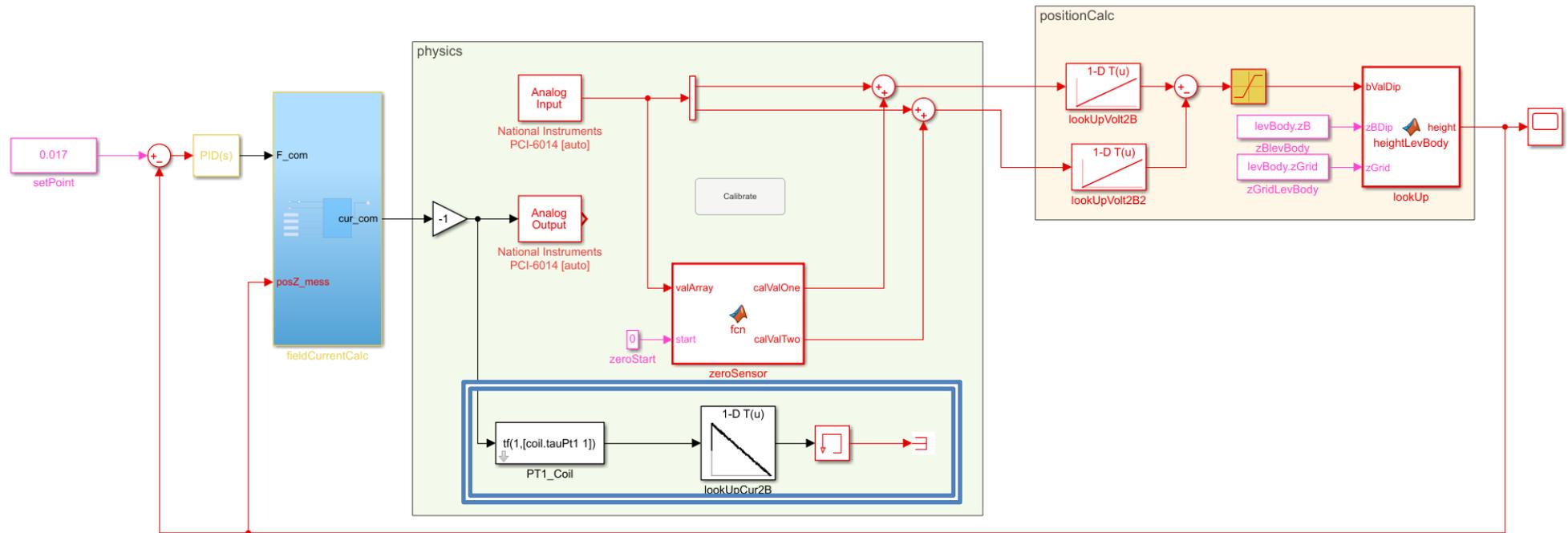


Abbildung 47 Simulink-Modell des realen Versuchsaufbaus

Dieses Simulink-Modell zeigt die Implementierung der Regelung. In diesem Modell wurden zwei Sensoren verwendet. In folgendem Inhalt wird sich aber nur auf einen Sensor bezogen. Dazu müsste nur die Verbindung von *calValTwo* zum Summenblock weggelassen und mit dem Teil im blauen Doppelrahmen ersetzt werden. Eigentlich müsste dieser Teil dann in *positionCalc* verschoben werden, wie im Simulationsmodell. Dabei beschreibt der Block *PT1_Coil* das Verzögerungsverhalten des Spulenstroms. Der Block *lookUpCur2B* basiert auf der reell aufgenommenen magnetischen Flussdichten auf den Hallsensor abhängig vom Strom. Mit diesem Teil simuliert man quasi den zweiten Sensor.

Außerdem beschreiben die beiden Blöcke *Analog Output* und *Analog Input* die Ein- und Ausgänge der Messkarte. Zusätzlich wurde der Matlabfunction-Block *zeroSensor* eingefügt. Dieser Block setzt den eingelesenen Sensorwert in Ruhelage der Spule auf eine magnetische Flussdichte von 0 Tesla. Der Sensor besitzt nämlich einen kleinen Offset. Alle anderen Blöcke sind wie im Simulationsmodell implementiert.

3.4.1.6 Streckenidentifikation

Die Streckenidentifikation erfolgt genau wie im Simulationsmodell. Allerdings wird bei der Aufnahme der Sprungantwort unter gleichen Bedingungen wie im Simulationsmodell eine größere Verzögerung erreicht. Diese höhere Verzögerung auf die Versorgungs-spannungsquellen, die Verstärkerschaltung und die Messkarte rückzuführen sein. Diese Parameter wurden in der Simulation nicht berücksichtigt. Dies stellt aber kein Problem dar, da man mit Aufnahme der realen Sprungantwort die Streckenidentifikation erneut durchführen kann.

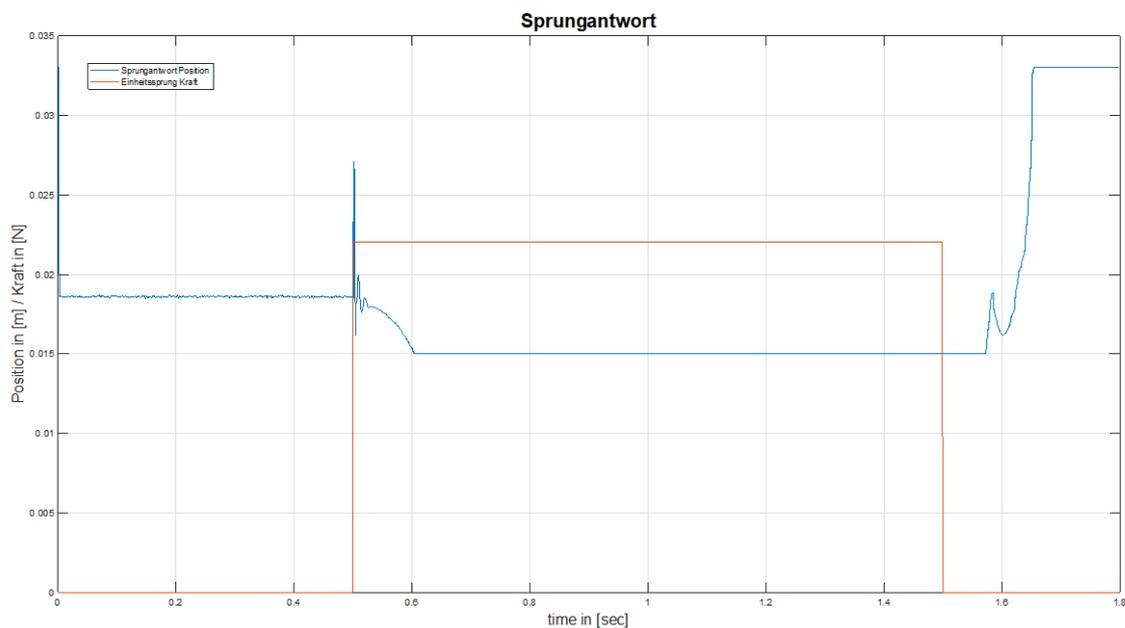


Abbildung 48 Sprungantwort der realen Strecke

Der Schwebekörper wurde unter der Spule mit einem Abstand von circa 18 mm positioniert. Anschließend wurde durch die Bestromung der Spule eine wirkende Kraft (orange im Plot) von 0,22 N kommandiert. Der Dipol wird angezogen, kurz oben gehalten und wieder fallen gelassen (Position → blau im Plot). Die Position im Plot stoppt bei einem Abstand von 15 mm, da die vermessenen Daten des Dipols hier enden. Dieser konnte aus physikalischen Abmaßen aufgrund der Hallsonde und Sicherheitsabstände nicht in näherer Umgebung vermessen werden.

3.4.1.7 Auslegung des Regler

Die Auslegung des Reglers wurde vom Simulationsmodell übernommen.

3.4.2 Darstellung der Problematik

Die reale Inbetriebnahme ist mit Schwierigkeiten verbunden. Die Positionserfassung arbeitet unter Bestromung der Spule noch nicht richtig. Es werden falsche Positionssignale erzeugt. Unter diesen Voraussetzungen kann eine Regelung nicht funktionieren. In Zukunft muss die Positionserfassung genauer untersucht werden. Mit weiterführenden Versuchsaufbauten, die das Verhalten zwischen Position und Bestromung der Spule darstellen, sollte an diesem Problem gearbeitet werden.

3.5 Modellierung des Verhaltens in Bezug auf Moment- und Kraftwirkung auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld erzeugt von mehreren Spulen und einem Ringmagnet

Die einfachere Variante einer Simulation eines Magnetschwebeversuchs wurde erfolgreich durchgeführt. Die physikalischen Modelle wurden in einfacher Form implementiert und verifiziert. Um Möglichkeiten und Probleme in der weiterführenden Arbeit darzustellen, wurden sich in dieser Arbeit elementare Gedanken darüber gemacht, wie ein komplexerer inverser Versuch aussehen kann. Um dies darzustellen, wurde ein grundlegender Regelkreis entworfen. Dazu wurde eine elementare Simulation zur Feld-, Kraft- und Positionsrechnung in Matlab/Simulink implementiert.

3.5.1 Schematischer Aufbau

Der Versuch soll aus einer Plattform mit einem Permanentmagnetring, Spulen, die als Elektromagnet fungieren, und mehreren Hallsensoren bestehen. Der Schwebekörper ist ein Dauermagnet, der zum Beispiel aus Neodym besteht.

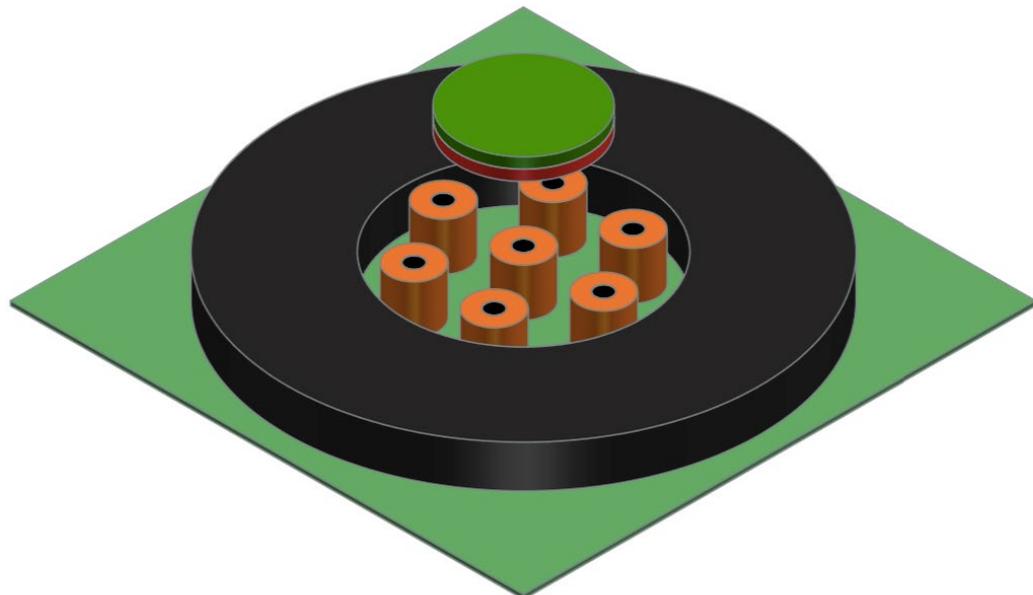


Abbildung 49 Schematischer Aufbau zum Plattformschwebeversuch

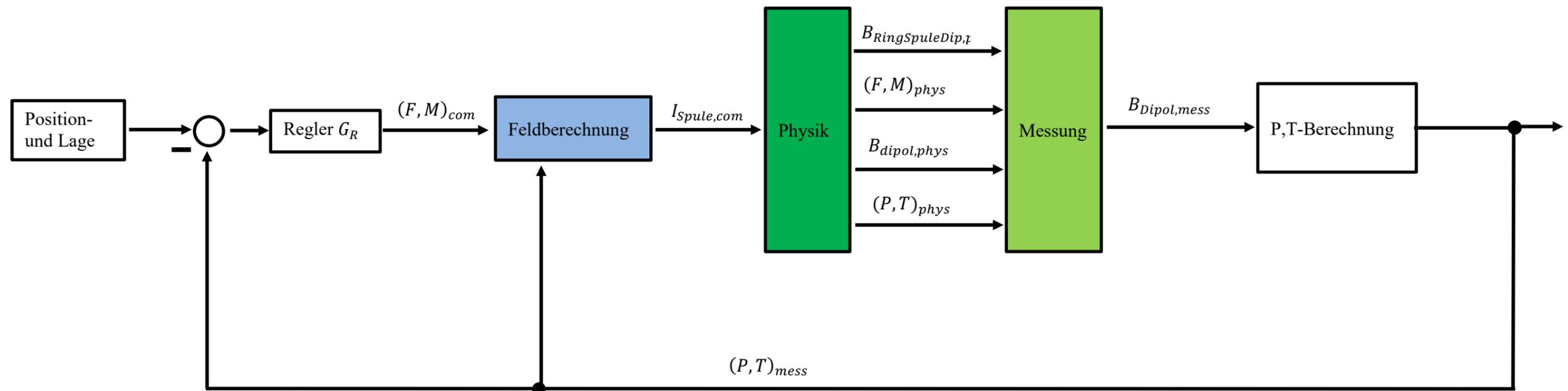
3.5.2 Entwurf Model und Regelung

3.5.2.1 Blockschaftbild zum grundlegenden Regelkreis

Der Entwurf zur Regelung soll die grundlegende angedachte Funktionsweise darstellen. Über eine Sollwertvorgabe soll die Position des Schwebedipols im Raum vorgegeben werden. Der Regler gibt als Stellsignal die Momente und Kräfte aus der Regelabweichung an den Block der Feldberechnung weiter. In diesem Funktionsbaustein soll das Feld für die gewünschten Kräfte und Momente für die aktuelle

Position des Dipols definiert werden. Aus diesen sollen dann die benötigten Ströme der Spulen berechnet werden und an die Regelstrecke (Physik) übergeben werden. Der Block Physik soll die reale Regelstrecke simulieren und deren Verhalten nachbilden. Im Block der Messung werden die magnetischen Flussdichten berechnet. Anhand der bekannten physikalischen Größen kann hier das herrschende Magnetfeld von den Spulen und dem Magnetring an den Sensoren

berechnet werden. Mit diesen Grundlagen kann durch Differenzbildungen zwischen dem wirklich bestehenden Feld (Magnetring, Spulen und Dipol) auf das Feld geschlossen werden, das der Dipol verursacht. Aus diesen berechneten Werten soll dann im Block P,T-Berechnung die aktuelle Position und Lage des schwebenden Dipols bestimmt werden. Mit diesen Größen wird dann der Regelkreis wieder geschlossen und daraus die Differenz von Soll- und Istwert gebildet.



| Block | Beschreibung |
|----------------|--|
| Regler | <ul style="list-style-type: none"> Regelalgorithmus |
| Feldberechnung | <ul style="list-style-type: none"> Berechnung des Feldes in 7 verschiedenen Punkten (je drei Raumrichtungen) für das entsprechende Moment und entsprechender Kraft für die gewünschte Position |
| Physik | <ul style="list-style-type: none"> Berechnung des Moments Berechnung des Feldes für die magnetische Feldstärke Berechnung Dipolfeld physikalisch Berechnung Lage und Position des Dipols |
| Messung | <ul style="list-style-type: none"> Messung des aktuellen Feldes komplett Berechnung des gemessenen Feldes von Spule und Ringmagneten Berechnung des Feldes des magnetischen Dipols |
| P,T-Berechnung | <ul style="list-style-type: none"> Berechnung der Lage und Position |

3.5.2.2 Entwurf zur Modellierung der Feld-, Kraft- und Positionsberechnung

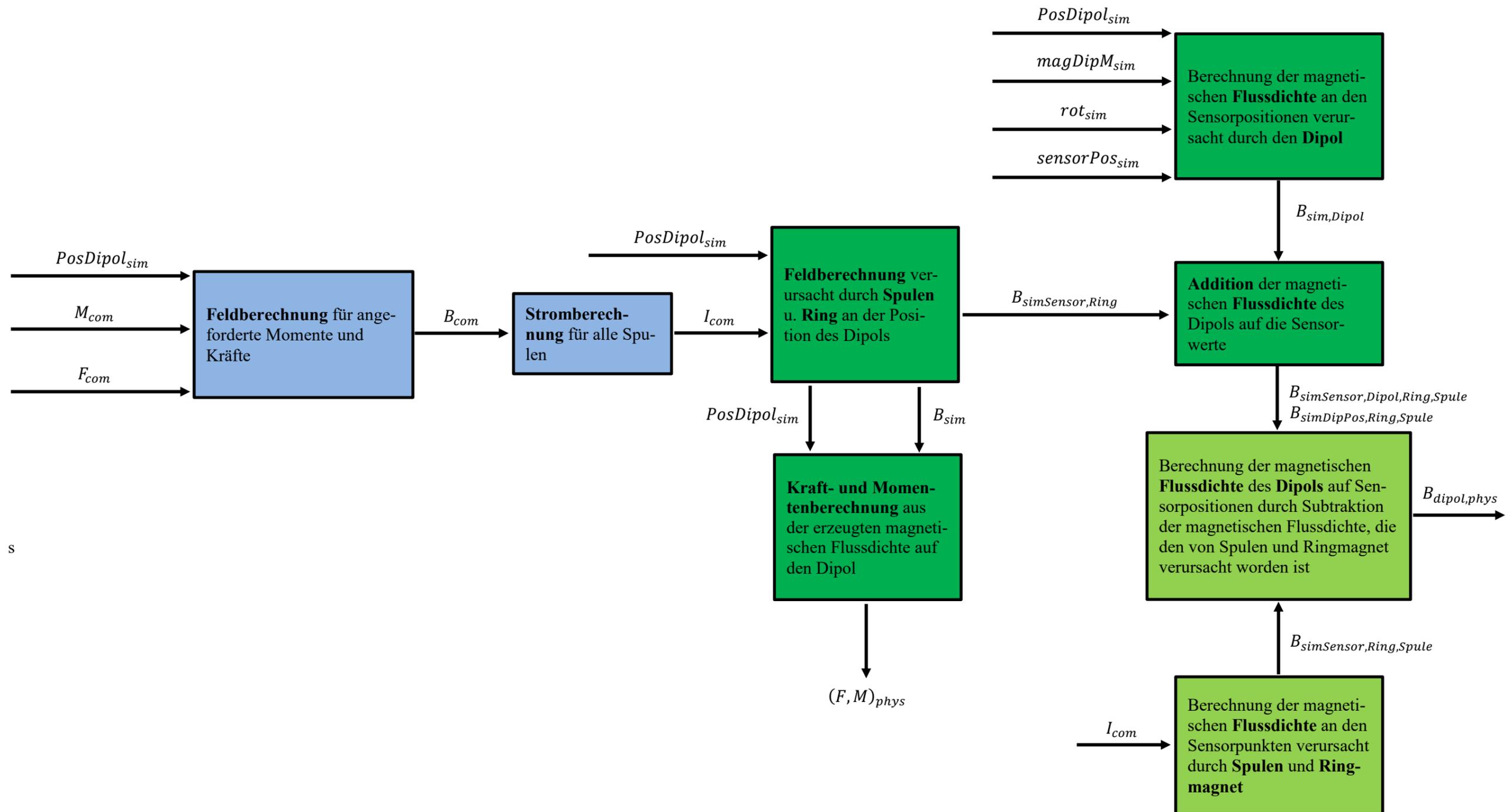


Abbildung 50 Entwurf für die Modellierung von Kräften und Momenten auf einen Dipol in einem äußeren Magnetfeld (Plattform)

Der hier beschriebene Entwurf soll die Blöcke Feldberechnung, Physik und Messung in der Simulation darstellen (farbliche Kennzeichnung).

| <i>Ein-Ausgang/Berechnung</i> | <i>Beschreibung</i> |
|--|---|
| <i>Eingang: F_{com}</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Vorgabe der Kraft, die auf einen Dipol in einem äußeren magnetischen Feld wirken soll |
| <i>Eingang: M_{com}</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Vorgabe des Moments, das auf einen Dipol in einem äußeren magnetischen Feld wirken soll |
| <i>Eingang: $PosDipol_{sim}$</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Aktuelle inertielle Positionskoordinaten des Schwebekörpers |
| <i>Eingang: $magDipM_{sim}$</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Vorgabe des magnetischen Dipolmoments des Dipols |
| <i>Eingang: rot_{sim}</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Beschreibung der aktuellen Lage des Dipols |
| <i>Ausgang: $(F, M)_{phys}$</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Berechnung der wirkenden Momente und Kräfte, die durch das Magnetfeld entstehen |
| <i>Ausgang: $B_{dipol,phys}$</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Magnetische Flussdichte an den Sensorpositionen, die durch den Schwebedipol verursacht wird |
| <i>Berechnung: B_{com}</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Vorgabe der magnetischen Flussdichten, um geforderte Momente und Kräfte auf den Schwebekörper zu erzeugen |
| <i>Berechnung: I_{com}</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Bestromung der Spulen, um das gewünschte Magnetfeld zu erzeugen |
| <i>Berechnung: B_{sim}</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Magnetische Flussdichte, die aufgrund des berechneten Stroms an der Position des Schwebedipols entsteht |
| <i>Berechnung: $B_{sim,Dipol}$</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Magnetische Flussdichte, die aufgrund der aktuellen Lage und Position des Dipols an den Sensorpositionen entsteht |
| <i>Berechnung: $B_{simSensor,Dipol, Ring, Spule}$</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Magnetische Flussdichte, die aufgrund des Rings, der Spulen und des Dipols an den Sensorpositionen entsteht |
| <i>Berechnung: $B_{simSensor, Ring, Spule}$</i> | <ul style="list-style-type: none"> • Magnetische Flussdichte, die aufgrund des Rings und der Spulen an den Sensorpositionen entsteht |

Tabelle 27 Beschreibung der Komponenten für den Entwurf des Simulationsmodell für den Plattformschweberversuch

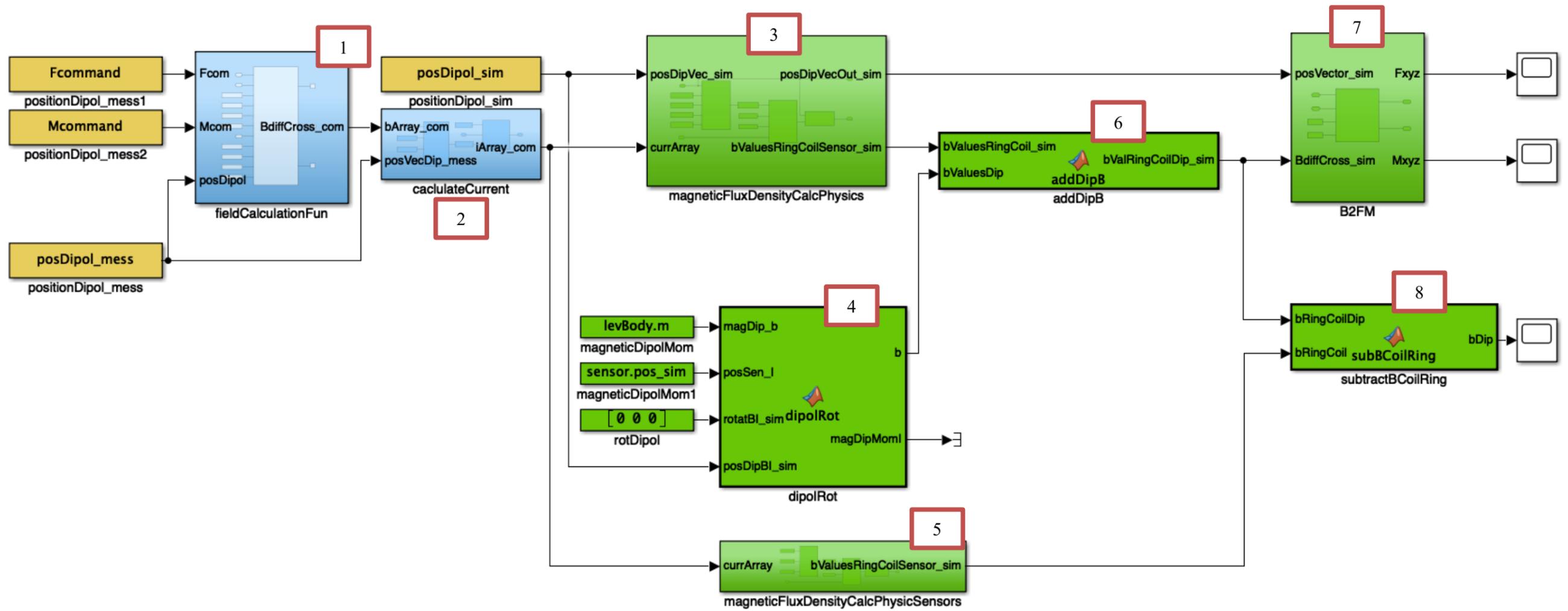


Abbildung 51 Simulink-Modell zur Krafterzeugung im äußeren Feld auf einen Dipol

Dieses Simulink zeigt die Implementierung aus 3.8.2.2. Im weiteren Inhalt wird auf die einzelnen Subsysteme beziehungsweise Matlabfunctionblöcke eingegangen und deren Funktionsweise erläutert.

3.5.2.3 Parametervorgabe für die Simulation

Die Simulation soll für verschiedene Versuchsaufbauten in einem Skript konfigurierbar sein. Dazu sind in folgenden Tabellen die verschiedenen Parameter mit ihren Namen im Code aufgeführt.

Spulenkonfiguration

| Variablenname | Beschreibung | Einheit |
|------------------------|--|---------|
| <i>coil.n_sim</i> | Anzahl der Spulen | - |
| <i>coil.angleX_sim</i> | Neigung der Spulen um x-Achse | rad |
| <i>coil.angleY_sim</i> | Neigung der Spulen um y-Achse | rad |
| <i>coil.pos_sim</i> | Positionsvergabe der Spulen | m |
| <i>coil.xB_sim</i> | Magnetische Flussdichte (x-Richtung) in Matrize erzeugt durch das Gesetz von Biot Savart | T |
| <i>coil.yB_sim</i> | Magnetische Flussdichte (y-Richtung) in Matrize erzeugt durch das Gesetz von Biot Savart | T |
| <i>coil.zB_sim</i> | Magnetische Flussdichte (y-Richtung) in Matrize erzeugt durch das Gesetz von Biot Savart | T |
| <i>coil.tau_sim</i> | Zeitkonstante der Spule | sec |

Tabelle 28 Simulationsparameter der Spulen

Schwebedipolkonfiguration

| Variablenname | Beschreibung | Einheit |
|------------------------------|--|-----------------|
| <i>levBody.mxB_com</i> | Dipolmoment in x-Richtung im körperfesten System | Am ² |
| <i>levBody.myB_com</i> | Dipolmoment in y-Richtung im körperfesten System | Am ² |
| <i>levBody.mzB_com</i> | Dipolmoment in z-Richtung im körperfesten System | Am ² |
| <i>levBody.mass_sim</i> | Masse des Schwebekörpers | kg |
| <i>levBody.radius_sim</i> | Radius des Schwebekörpers | m |
| <i>levBody.height_sim</i> | Höhe des Schwebekörpers | m |
| <i>levBody.initPos_sim</i> | Startposition des Schwebekörpers durch Berechnung | m |
| <i>levBody.initAnlge_sim</i> | Startlage des Schwebekörpers | rad |
| <i>levBody.mxDevB_sim</i> | Abweichung des Dipolmoments in x-Richtung im körperfesten System | Am ² |
| <i>levBody.myDevB_sim</i> | Abweichung des Dipolmoments in y-Richtung im körperfesten System | Am ² |
| <i>levBody.mzDevB_sim</i> | Abweichung des Dipolmoments in z-Richtung im körperfesten System | Am ² |

Tabelle 29 Simulationsparameter des Schwebedipols

Sensorkonfiguration

| Variablenname | Beschreibung | Einheit |
|-----------------------------|---|----------------|
| <i>sensor.varNoiseX_sim</i> | Varianz des normalverteilten Rauschens der Sensoren in x-Richtung | T ² |
| <i>sensor.varNoiseY_sim</i> | Varianz des normalverteilten Rauschens der Sensoren in y-Richtung | T ² |

| | | |
|-----------------------------|--|-------|
| <i>sensor.varNoiseZ_sim</i> | Varianz des normalverteilten Rauschens der Sensoren in x-Richtung | T^2 |
| <i>sensor.meanX_sim</i> | Mittelwert des Rauschens in x-Richtung (beschreibt den Offset des Sensors) | T |
| <i>sensor.meanY_sim</i> | Mittelwert des Rauschens in y-Richtung (beschreibt den Offset des Sensors) | T |
| <i>sensor.meanZ_sim</i> | Mittelwert des Rauschens in z-Richtung (beschreibt den Offset des Sensors) | T |
| <i>sensor.posX_sim</i> | Sensorposition in x-Koordinate | m |
| <i>sensor.posY_sim</i> | Sensorposition in y-Koordinate | m |
| <i>sensor.posZ_sim</i> | Sensorposition in z-Koordinate | m |
| <i>sensor.angleX_sim</i> | Sensorausrichtung um x-Achse | rad |
| <i>sensor.angleY_sim</i> | Sensorausrichtung um y-Achse | rad |
| <i>sensor.angleZ_sim</i> | Sensorausrichtung um z-Achse | rad |
| <i>sensor.n_sim</i> | Sensoranzahl | - |

Tabelle 30 Simulationsparameter der Sensoren

Sollwertkonfiguration

| <i>Variablenname</i> | <i>Beschreibung</i> | <i>Einheit</i> |
|------------------------------|---|----------------|
| <i>set.xyzPosPoint_com</i> | Vorgabe Schwebepunkt | m |
| <i>set.xyzCurveRadiuscom</i> | Vorgabe der Schwebekurve in Abhängigkeit von der Zeit | m, sec |
| <i>Zeit</i> | Anhängig von der Schrittweite | sec |

Tabelle 31 Simulationsparameter des Sollwerts

3.6 Test und Aufbau der verschiedenen Blöcke

Die Simulation besteht aus einem Simulink-Modell und einem Matlabskript. In dem Simulink-Modell sind fast alle Parameter mit Variablen definiert. Diese Werte werden in einem Skript belegt und anschließend über den Workspace an das Modell übergeben. Nach der Definition im Skript wird die Simulation aus dem Skript gestartet und vorgegebene mit berechneten Werten verglichen.

Grundsätzlich stehen hinter allen Matlabfunction-Blöcken Funktionen, die in Matlab implementiert und durch einen Aufruf in Testskripts überprüft worden sind. Aus diesem Grund werden in folgendem Kapitel für jedes Subsystem der Aufbau und die elementare Funktionsweise zuerst beschrieben. Im Anschluss folgt dann der „Test case“ und die Evaluierung.

3.6.1 Dipol (Matlabfunction 4)

3.6.1.1 Aufbau

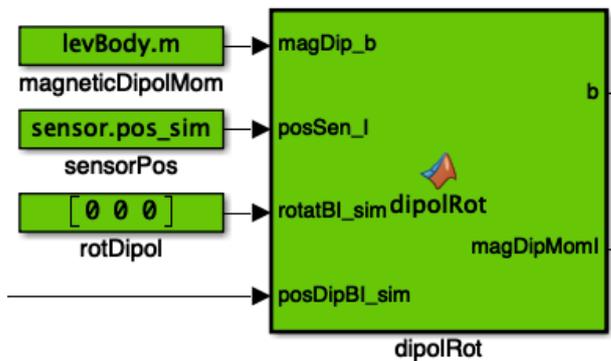


Abbildung 52 Matlabfunction-Block *dipolRot*

Für den Schwebedipol wird ein magnetisches Dipolmoment vorgegeben. Mit Hilfe dieser charakteristischen Größe wird nach dem in den Grundlagen behandelten physikalischen Modell (2.2.3) die magnetische Flussdichte für die vorgegebenen Sensorpositionen berechnet. Zusätzlich kann für die Verdrehung des Dipols im inertialen Koordinatensystem um die X-, Y- und Z-Achse ein Wert vorgegeben werden. Dieser Schritt wird mit Hilfe einer Drehmatrix implementiert. Die Werte für die Position und Lage sind zurzeit noch statisch angegeben. In Zukunft sollen der aktuelle Winkel und die Position während der Laufzeit des Modells berechnet werden. Zusätzlich muss in weiteren Schritten eine Verdrehung für die Sensoren entwickelt werden. Hier bietet sich die Transformation mit Drehmatrizen an.

3.6.1.2 Test

Für den Test wurden in einem Skript alle Eingangsargumente definiert:

- Magnetisches Dipolmoment
- Sensorpositionen
- Rotation des Dipols
- Position des Dipols

Anschließend wurden für die Sensorpositionen die jeweiligen magnetischen Flussdichten in allen drei Raumrichtungen berechnet. Durch eine Fehlerausgleichsrechnung über die kalkulierten Werte wurde wie in Abschnitt 3.2.3.1 das magnetische Dipolmoment geschätzt. Für den Fall, dass der Dipol im inertialen Koordinatensystem verdreht ist, wurde der Betrag des magnetischen Dipolmoments berechnet und mit dem Ausgangswert abgeglichen.

3.6.2 Feldberechnung (Subsystem 1)

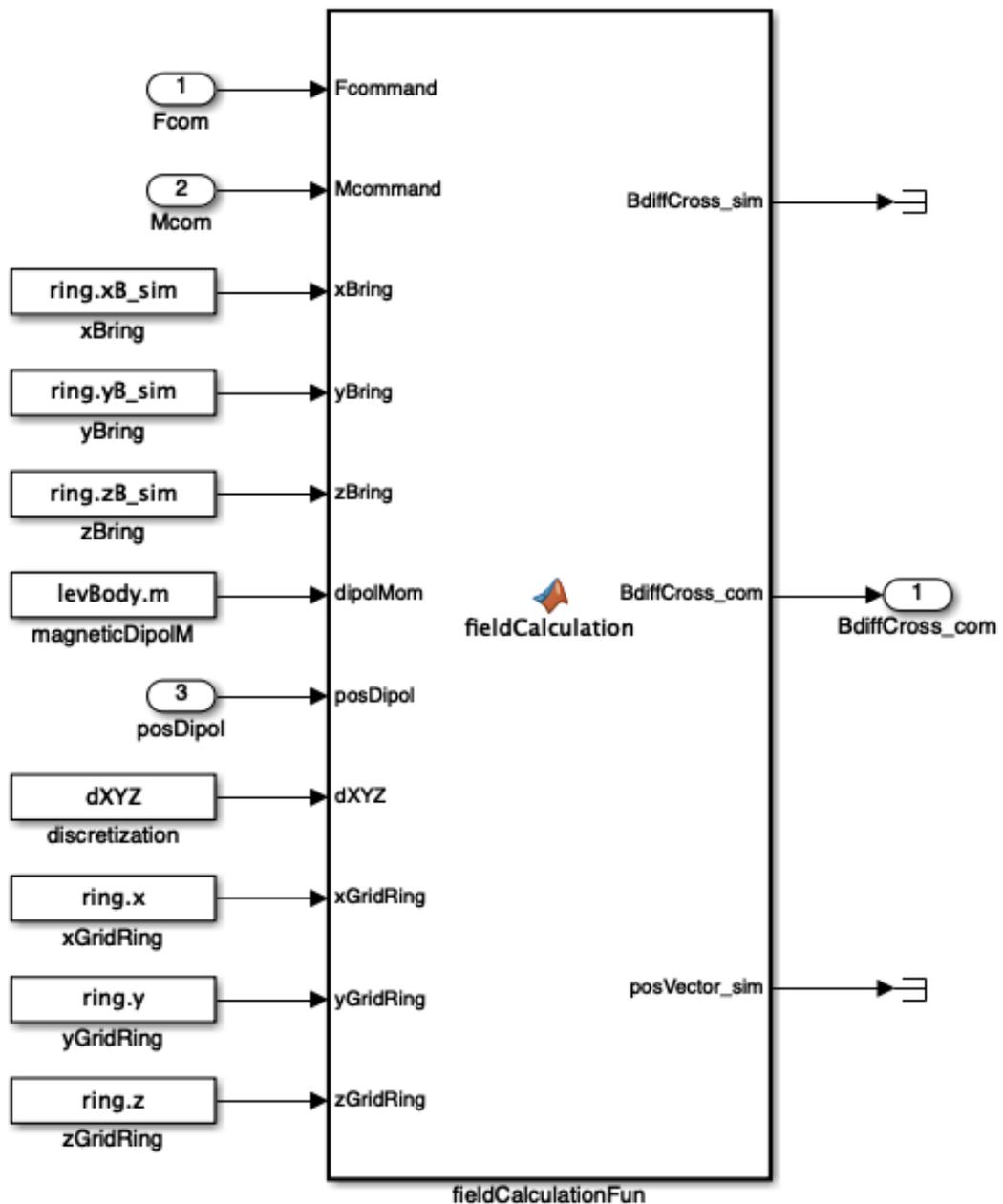


Abbildung 53 Modell zur Feldberechnung für gewünschte Kräfte und Momente

3.6.2.1 Aufbau

Zuallererst werden statische Werte für die Kräfte $F_{command}$ und Momente $M_{command}$ vorgegeben. Diese Werte sollen in Zukunft vom Regler zeitabhängig und aus der Regelabweichung heraus vorgegeben werden. Auf Basis der aktuellen Position des Schwebedipols werden die magnetischen Flussdichten für vorgegebene Kräfte in der Umgebung festgelegt.

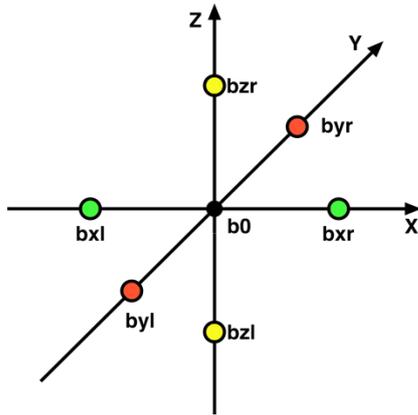


Abbildung 54 Differenzenkreuz zur Bestimmung der benötigten magnetischen Flussdichten

Der Punkt b_0 entspricht dabei der zentralen Position des Schwebemagnets. Die umliegenden Punkte beschreiben dabei die Änderung des Magnetfelds. Die Diskretisierungsschrittweite wird dabei durch das Array $dXYZ$ bestimmt. Für jeden Punkt werden dabei drei magnetische Flussdichten in den drei Raumrichtungen ermittelt. Um im realen Versuchsaufbau den Strom niedrig zu halten, wird die magnetische Flussdichte des Ringmagneten genutzt.

In dieser Arbeit wird vorerst eine Vereinfachung für die Festlegung der magnetischen Flussdichten verwendet. Es wird angenommen, dass sich der Dipol nicht neigt. Das heißt, die Achsen des körperfesten Systems des Schwebedipols sind zum inertialen System parallel. Dies bezieht sich im eigentlichen auf die Z-Achse, da der Schwebekörper rotationssymmetrisch ist. Durch diese Festlegung liegt der magnetische Dipolmomentenvektor parallel zur z-Achse. Aufgrund der Festlegung kann man sich auf drei Punkte und der zugehörigen drei magnetischen Flussdichten in Bezug auf den Raum beschränken. Als erstes legt man die X-, Y- und Z-Komponente für den Punkt b_0 fest. Diese beschreiben das wirkende Moment um die drei Achsen.

$$b_{0y} = \frac{M_x}{-m_z}$$

$$b_{0x} = \frac{M_y}{m_z}$$

$$b_{z0} = B_{\text{Magnetring}}$$

Die Z-Komponente kann für diesen Fall vernachlässigt werden, da die Lage des Körpers mit der Z-Achse parallel zum inertialen Koordinatensystem angenommen wird. Anschließend werden die magnetischen Flussdichten für die Punkte b_{zl} und b_{zr} für entsprechende Kräfte berechnet.

$$\partial b_{zR_x} = \frac{b_{zR_x} - b_{z0}}{\Delta x}$$

$$\partial b_{zR_y} = \frac{b_{zR_y} - b_{z0}}{\Delta y}$$

$$\partial b_{zR_z} = \frac{b_{zR_z} - b_{z0}}{\Delta z}$$

$$\partial b_{zL_x} = \frac{b_{z0} - b_{zL_x}}{\Delta x}$$

$$\partial b_{zL_y} = \frac{b_{z0} - b_{zL_y}}{\Delta y}$$

$$\partial b_{zL_z} = \frac{b_{z0} - b_{zL_z}}{\Delta z}$$

Im nächsten Schritt werden an der Position des Dipols und den Punkten, die die Änderung des Magnetfelds bestimmen, die magnetischen Flussdichten, die der Magnetring durch Interpolation erzeugt, ermittelt. Diese Werte stammen aus der Vorarbeit. Hier wurde der Ringmagnet in einem definierten Messraster vermessen. Diese Werte werden der Funktion durch $xBring$, $yBring$ und $zBring$ übergeben. Die zugehörigen Koordinaten liefern die Matrizen $xGridRing$, $yGridRing$ und $zGridRing$.

Abschließend werden die ermittelten Werte voneinander subtrahiert. So definieren sich die magnetischen Flussdichten, die an den vorgegebenen Punkten von den Spulen erzeugt werden müssen. So tritt dann in Summe die gewünschte Kraft- und Momentenwirkung ein.

3.6.2.2 Test

Zur Überprüfung der Funktion wurde die Funktion (3.9.4), die am Ende der Simulation steht, verwendet und geprüft. Diese Funktion berechnet für die Werte der magnetischen Flussdichten am Differenzenkreuz die Kraft und das Moment auf den schwebenden Körper.

In einem Skript wurden alle notwendigen Variablen für einen realistischen Fall definiert. Die Werte aus den Vermessungen des Ringmagneten wurden ebenfalls übernommen. Anschließend wurden für eine Kraft und ein Moment die notwendigen Flussdichten berechnet. Als Gegenteil wurden diese Werte wieder in die Funktion übergeben, die aus der magnetischen Flussdichte die entsprechenden Kräfte und Momente berechnet. Die vorgegebenen und die berechneten Werte müssen dann übereinstimmen.

3.6.3 Spulen

Die Spulen können mit Hilfe des Skripts unter Angabe von folgenden Parametern definiert werden.

- Position
- Lage (Neigung um X-, Y- und Z-Achse)
- Anzahl

In dieser Arbeit wird die Simulation als System mit neun Spulen, die kreisförmig angeordnet sind, betrachtet.

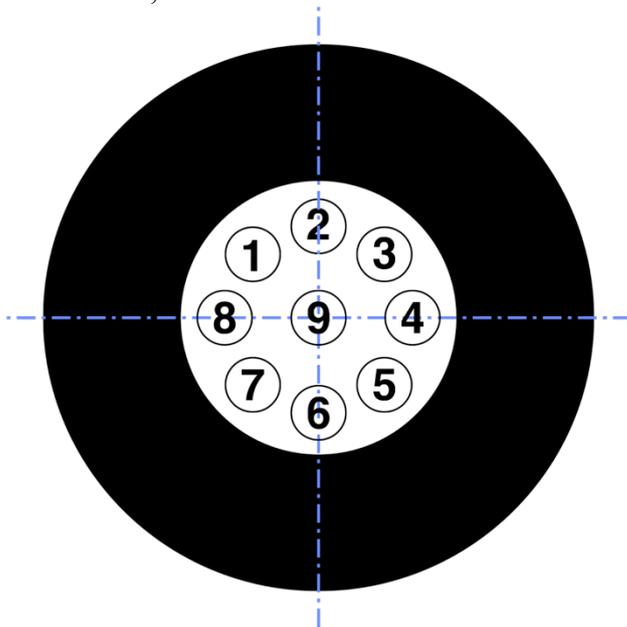


Abbildung 55 Spulenanordnung in der Draufsicht

3.6.3.1 Stromberechnung (Subsystem 2)

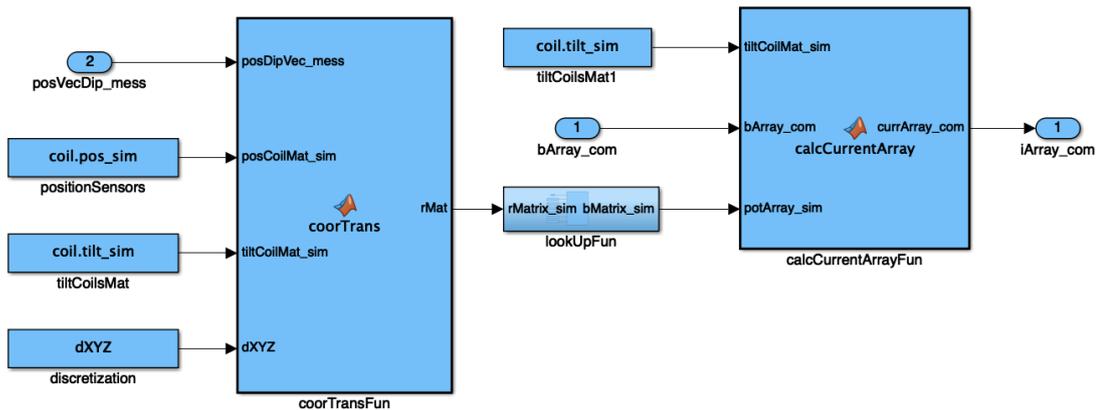


Abbildung 56 Modell zur Stromberechnung

3.6.3.1.1 Neigung und Positionierung der Spulen $coordTransFun$

3.6.3.1.1.1 Aufbau

In diesem Funktionsbaustein werden die Vektoren zwischen Differenzkreuz des Dipols und dem Ursprung der Spule berechnet. Aus den Koordinaten können dann mit Hilfe von Interpolation und LookUp-Tables die zugehörigen, normierten, magnetischen Flussdichten ermittelt werden. Die folgende Schemazeichnung zeigt die Herleitung. Die Skizze zeigt den Zusammenhang für den zweidimensionalen Fall. Das Modell wurde in der Simulation dreidimensional betrachtet.

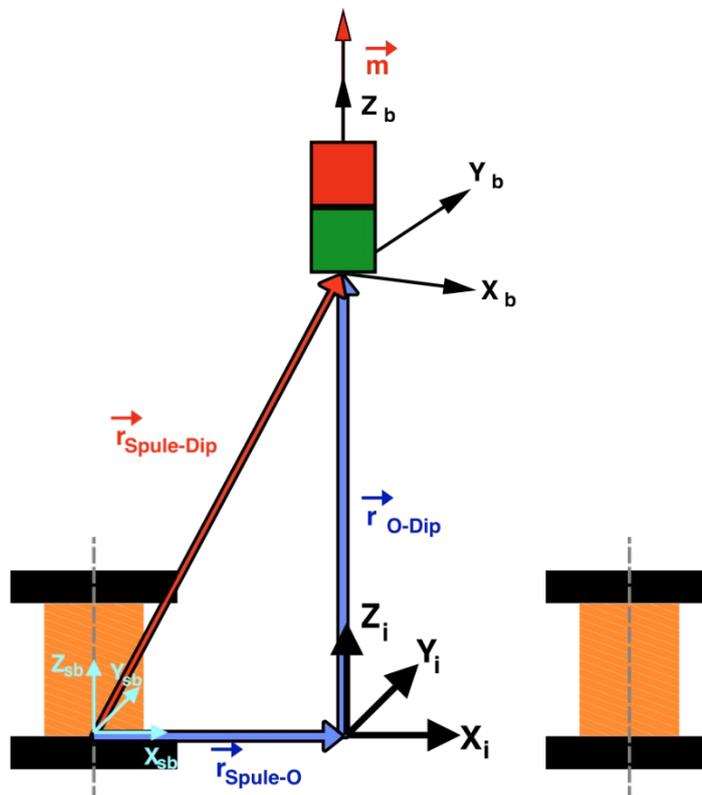


Abbildung 57 Berechnung aufgrund der magnetischen Flussdichte verursacht durch eine Spule an der Position des Dipols

Die Spulen und der inertielle Koordinatenursprung sitzen an einer festen Position. Der Dipol schwebt und verändert seine Position. Durch einen Positionserfassungsalgorithmus wird in Zukunft die aktuelle Position erfasst. Durch einfache Vektoraddition kann nun der Vektor zwischen den Spulen- und den Dipolkoordinatenursprung bestimmt werden.

$$\vec{r}_{Spule-Dip} = \vec{r}_{Spule-0} + \vec{r}_{0-Dip}$$

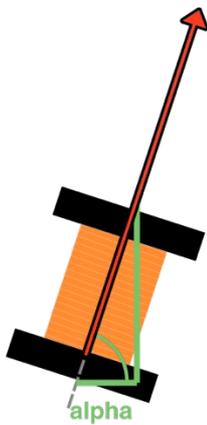
Falls die betrachtete Spule um die X- oder Y-Achse im inertialen System geneigt ist, wird eine Koordinatentransformation durchgeführt, um später die richtigen magnetischen Flussdichten zu erhalten.

In der folgenden Abbildung ist links die Spule in ihrer Einbaulage dargestellt. Man stellt sich nun vor, die Spule wieder in ihre Ausgangslage um den Winkel α zurückzudrehen.

Des halb muss der Vektor $\vec{r}_{Spule-Dip}$ (rote Farbe) ebenfalls zurückgedreht werden.

Durch dieses Vorgehen müssen die Datensätze in den Look-Up-Tables nicht verändert werden. Zusätzlich müssen später auch die drei Komponenten der erzeugten magnetischen Flussdichten transformiert werden.

Einbaulage



Transformation

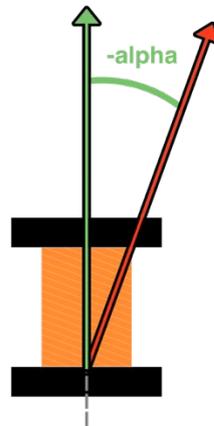


Abbildung 58 Einbaulage und Schema zur Berechnung der magnetischen Flussdichte unter Neigung

Abschließend werden die Koordinaten in der Matrize $rMat$ in folgender Reihenfolge ausgegeben. Diese Reihenfolge wird bei der Signalführung im ganzen Modell beibehalten. In einigen Abschnitten werden ähnliche Koordinatenberechnungen durchgeführt. Die Zusammensetzung der Koordinaten beziehungsweise die magnetische Flussdichten, die aus der Interpolation hervorgehen, bleiben immer in gleicher Reihenfolge. Die Variable „n“ deutet dabei die mögliche Fortsetzung von Spulen oder Sensoren an.

Tabelle 32 Reihenfolge der Koordinatenausgabe aus *coorTrans* (*rMat*)

3.6.3.1.1.2 Test

In einem Skript werden die Eingangsvariablen der Funktion *coorTrans* definiert.

| Variable | Beschreibung |
|------------------------|--|
| <i>posDipVec_mess</i> | Beschreibung der Position des Dipols |
| <i>posCoilMat_sim</i> | Beschreibung der Positionskoordinaten der Spulen |
| <i>tiltCoilMat_sim</i> | Beschreibung der Neigungen der Spulen |
| <i>dXYZ</i> | Diskretisierung in X-, Y- und Z-Richtung |

Tabelle 33 Beschreibung der Variablen für die Funktion *coorTrans* für Test

Im Anschluss wird die Funktion *coorTrans* mit den entsprechenden Eingangsargumenten aufgerufen. Mit dem Ergebnis *rMat*, das eigentlich an den *lookUpFun*-Block zur Bestimmung der magnetischen Flussdichten an den Positionen in Bezug auf die Koordinatensysteme der Spulen dient, wird die Berechnung gegenläufig durchgeführt. Als Ergebnis des Tests erhält man die aktuelle Position des Dipols. Die Vorgabekoordinaten werden mit den berechneten Koordinaten verglichen. Beziehungweise wird eine allgemeine Summe aus dem Betrag der Differenz der Vektoren gebildet. Diese ergibt dann für den erfolgreichen Softwaretest null.

3.6.3.1.2 LookUp Table für die Bestimmung der magnetischen Flussdichte an gewünschten Positionen *lookUpFun*

3.6.3.1.2.1 Aufbau

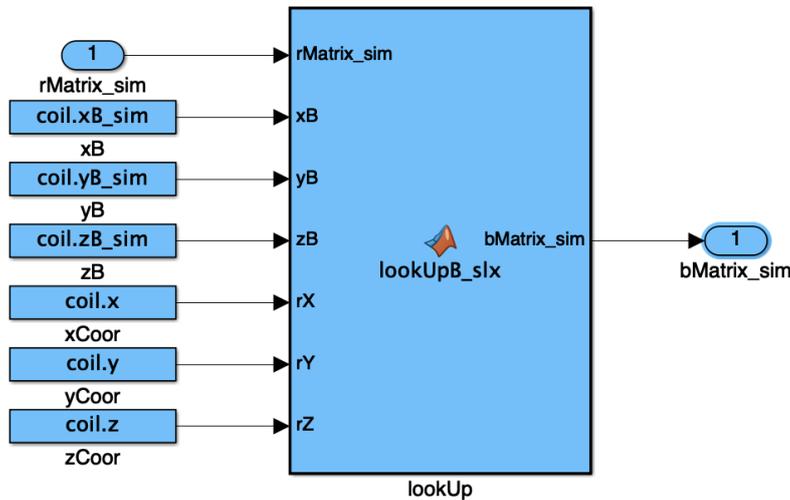


Abbildung 59 Matlabfunction-Block *lookUp*

Mit Hilfe der zuvor erzeugten Vektoren im körperfesten Koordinatensystem der Spule können nun mit Hilfe von dreidimensionaler Interpolation die entsprechenden magnetischen Flussdichten ermittelt werden. Die Variablen *coil.xB_sim*, *coil.yB_sim* und *coil.zB_sim* beinhalten die normierten magnetischen Flussdichten in allen drei Raumrichtungen für einen durch die Koordinaten *coil.x*, *coil.y* und *coil.z* definierten Raum. Diese sind auf einen Strom von einem Ampere normiert. So müssen im weiteren Verlauf die Werte nur noch mit dem wirklichen Strom multipliziert werden. So erhält man die gewünschten magnetischen Flussdichten für den jeweiligen Strom. Das Array *rMatrix* enthält alle dreidimensionalen Vektoren zwischen Spule und Dipol. In der *bMatrix_sim* werden alle entsprechen magnetischen Flussdichten in gleicher Reihenfolge weitergegeben.

3.6.3.1.2.2 Test

Für die Funktionsprüfung wurden die Variablen *rX*, *rY* und *rZ*, die die Koordinaten über den Messraum der Spulen beschreiben, mit einfachen überschaubaren Variablen definiert. Als nächstes wurden die Messwerte *xB*, *yB* und *zB* mit ganzzahligen Werten belegt. Die *rMatrix* wurde als kleine Matrix mit einfachen Zahlen belegt. Anhand der einfachen Variablenbelegungen können die von Matlab berechneten Ergebnisse durch einen manuellen Abgleich überprüft werden.

3.6.3.1.3 Berechnung der unterschiedlichen Stromstärken für die Spulen *calcCurrentArrayFun*

3.6.3.1.3.1 Aufbau

Um die benötigten Stromstärken für die Spulen zu berechnen, wird ein Gleichungssystem aufgestellt. Durch die Lösung des Systems aufgrund der spezifizierten magnetischen Flussdichten und der zuvor normierten, berechneten magnetischen Flussdichten werden die Stromstärken für jede einzelne Spule berechnet. Dieses mathematische beziehungsweise theoretische Verfahren berücksichtigt allerdings die technische Real-

sierung nicht. Darum muss in Zukunft ein intelligenter Bestromungsalgorithmus entwickelt werden. Bevor das Gleichungssystem aufgestellt werden kann, müssen die normierten magnetischen Flussdichten der Spulen entsprechend der Einbauneigung der jeweiligen Spule transformiert werden.

In anschließendem Aufbau wird das Gleichungssystem wie folgt aufgestellt.

$$\vec{b} = \underline{A} * \vec{i}$$

$$\begin{bmatrix} b_{X0} \\ b_{Y0} \\ b_{Z0} \\ b_{ZR_x} \\ b_{ZL_x} \\ b_{ZR_y} \\ b_{ZL_y} \\ b_{ZR_z} \\ b_{ZL_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{X0_n_1} & b_{X0_n_2} & b_{X0_n_3} & \cdots & b_{X0_n_9} \\ b_{Y0_n_1} & b_{Y0_n_2} & b_{Y0_n_3} & \cdots & b_{Y0_n_9} \\ b_{Z0_n_1} & b_{Z0_n_2} & b_{Z0_n_3} & \cdots & b_{Z0_n_9} \\ b_{ZR_x_n_1} & b_{ZR_x_n_2} & b_{ZR_x_n_3} & \cdots & b_{ZR_x_n_9} \\ b_{ZL_x_n_1} & b_{ZL_x_n_2} & b_{ZL_x_n_3} & \cdots & b_{ZL_x_n_9} \\ b_{ZR_y_n_1} & b_{ZR_y_n_2} & b_{ZR_y_n_3} & \cdots & b_{ZR_y_n_9} \\ b_{ZL_y_n_1} & b_{ZL_y_n_2} & b_{ZL_y_n_3} & \cdots & b_{ZL_y_n_9} \\ b_{ZR_z_n_1} & b_{ZR_z_n_2} & b_{ZR_z_n_3} & \cdots & b_{ZR_z_n_9} \\ b_{ZL_z_n_1} & b_{ZL_z_n_2} & b_{ZL_z_n_3} & \cdots & b_{ZL_z_n_9} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{bmatrix}$$

Durch die Vorgabe von neun magnetischen Flussdichten werden zur Lösung des Systems neun Spulen mit verschiedenen Stromstärken benötigt. Durch Bildung der inversen Matrix kann das Gleichungssystem einfach gelöst werden und anschließend ausgegeben werden.

3.6.3.1.3.2 Test

Für den Test der Funktion wurden aus dem Block der Feldberechnung ein Kommandoarray (\vec{b}) für eine typische Kraft im Modell berechnet. Zudem wurde ebenfalls im Modell die Matrix \underline{A} berechnet und der zu testenden Funktion übergeben. Zusätzlich wurden die Neigungen der Spulen definiert. Diese Parameter wurden der Funktion übergeben und ausgeführt. Mit der Rückgabe des Vektors \vec{i} wurde dann anschließend mit der Gleichung

$$\vec{b} = \underline{A} * \vec{i}$$

der Vektor \vec{b} berechnet. Abschließend wurde aus dem vorgegebenen \vec{b} und dem berechneten \vec{i} die Differenz und über alle Elemente die Summe gebildet. Für den erfolgreichen Test erhält man als Kontrollwert null.

3.6.3.2 Berechnung der magnetischen Flussdichte verursacht durch Spulen und Ringmagnet für definierte Punkte (Subsystem 3)

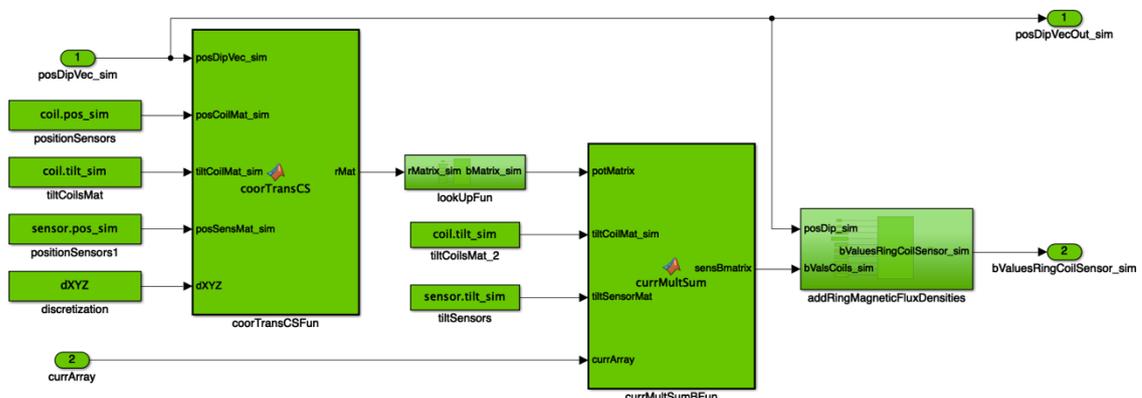


Abbildung 60 Berechnung der magnetischen Flussdichte verursacht durch Spulen und Ringmagnet für definierte Punkte

3.6.3.2.1 Berechnung der Position der magnetischen Flussdichte *coorTransCSFun*

3.6.3.2.1.1 Aufbau

Der Funktionsbaustein *coorTransCSFun* ist analog zu *coorTransFun* (Abschnitt: 3.9.3.1.1) aufgebaut. Zusätzlich werden in diesem Teil die Sensoren in Bezug auf die Koordinatensysteme der einzelnen Spulen betrachtet. So kann die Messwertaufnahme der Sensoren simuliert werden.

In der Grafik beschreiben die roten Ortsvektoren im körperfesten Koordinatensystem der einzelnen Spule die Position, an der die magnetische Flussdichte berechnet werden soll. Wegen der Übersichtlichkeit wurden die körperfesten Koordinatensysteme der Spulen in der Skizze weggelassen. Sie befinden sich im Mittelpunkt an der Unterseite der Zylinderform. Der Ortsvektor für jede Spule berechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Ortsvektor zur Berechnung der Spule im körperfesten Koordinatensystem} \\ &= \text{Ortsvektor der Spule im inertialen Koordinatensystem} \\ &\quad - \text{Ortsvektor des Hallensors im inertialen Koordinatensystem} \end{aligned}$$

Für den Fall von der Neigung von Spulen müssen die Vektoren wie in Abschnitt 3.9.3.1.1 wieder transformiert werden.

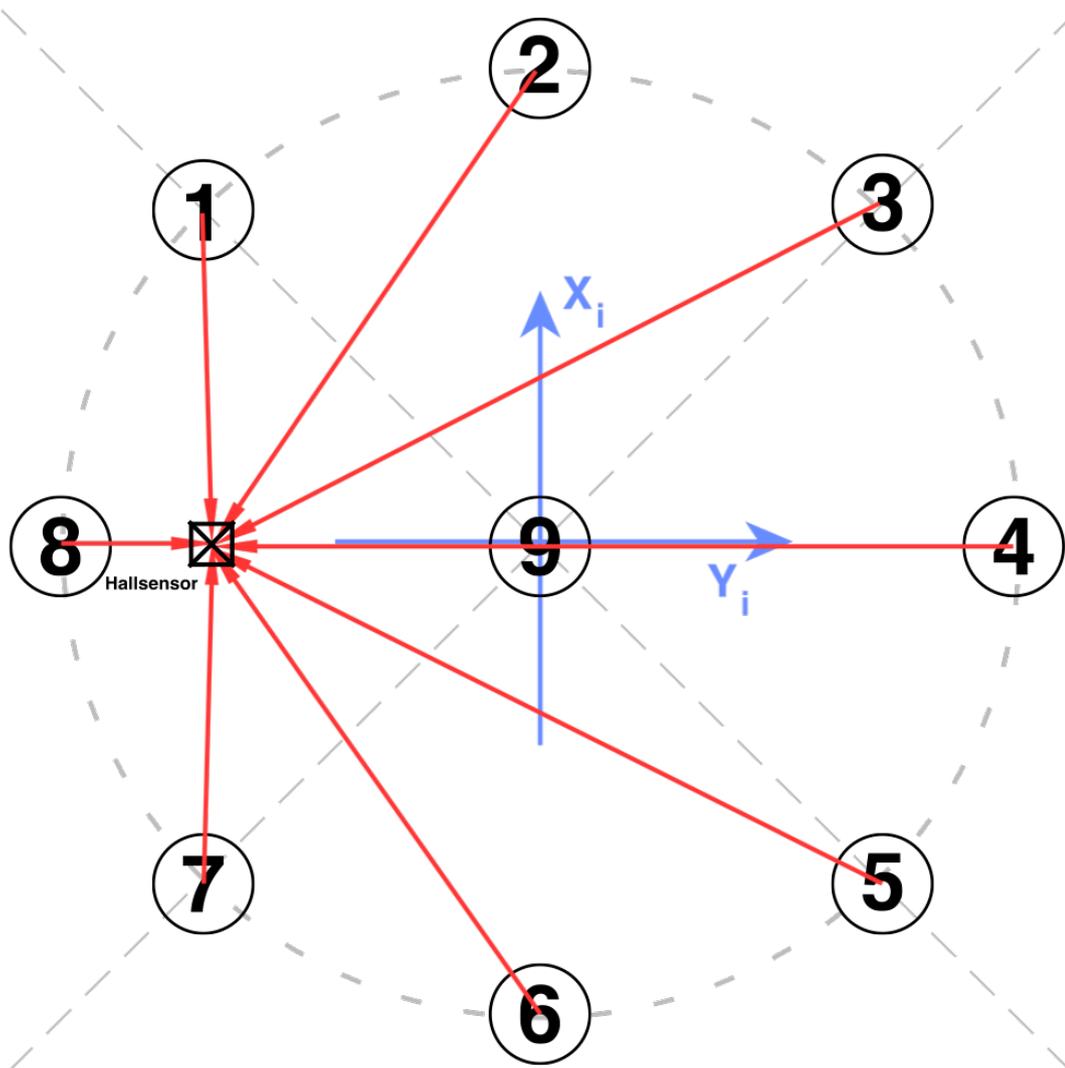


Abbildung 61 Spulen in Bezug auf die Hallensoren

Abschließend werden alle Werte in entsprechender Reihenfolge in einer Matrix abgelegt und an den `lookUpFun`-Block übergeben.

3.6.3.2.1.2 Test

Der Test wurde ähnlich wie in Abschnitt 3.9.3.1.1.2. Zusätzlich werden die Sensorpositionen mitbetrachtet.

3.6.3.2.2 Berechnung der unterschiedlichen Stromstärken für die Spulen *lookUpFun*

Das Subsystem *lookUpFun* entspricht der Funktion, die in Abschnitt 3.9.3.1.2 beschrieben ist. Einziger Unterschied ist, dass die übergebene Matrize durch die hinzugefügten Sensorwerte größer ist.

3.6.3.2.3 Berechnung der unterschiedlichen Stromstärken für die Spulen *currMultSumBFun*

3.6.3.2.3.1 Aufbau

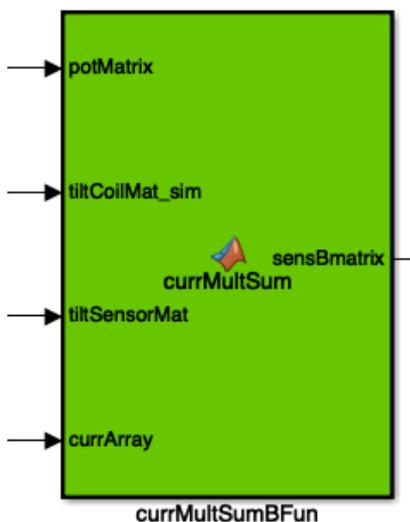


Abbildung 62 Matlabfunctionblock zur Multiplikation des Stroms und Aufsummierung der einzelnen magnetischen Flussdichten der Spulen

In diesem Matlabfunctionblock werden alle magnetischen Flussdichten der Spulen an den definierten Stellen mit dem entsprechenden Strom der Spulen multipliziert. Ebenfalls wird hier die Neigung der Spulen berücksichtigt. Im Anschluss werden alle einzelnen magnetischen Flussdichten der Spulen positions- und raumrichtungsabhängig aufsummiert. Als letztes werden die entstandenen B-Sensorwerte entsprechend ihrer Verdrehung in Bezug auf das inertielle Koordinatensystem transformiert.

3.6.3.2.3.2 Test

In diesem Test beschreibt die *potMatrix* die magnetische Flussdichte, die von den Spulen ausgeht für ein Ampere. Die Matrix *tiltCoilMat_sim* beschreibt die Neigung der Spulen und *tiltSensorMat* die der Sensoren. Für den Vektor *currArray* wurden Stromwerte von einem Ampere gewählt. So müssen die Vorgabematrix *potMatrix* und die Ausgabematrix *sensBmatrix* die gleichen Werte beinhalten. Am Ende des Tests wurde die Differenz der beiden Matrize gebildet und die Summe über alle Elemente gebildet. Für einen erfolgreichen Test ergibt die Kontrollsumme null.

3.6.3.2.4 Berechnung der magnetischen Flussdichten verursacht durch den Ringmagneten *addRingMagneticFluxDensities*

3.6.3.2.4.1 Aufbau

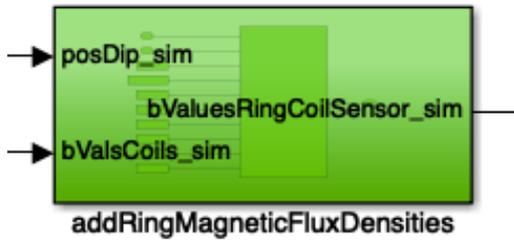


Abbildung 63 Subsystem zur Bestimmung und Addition der magnetischen Flussdichte verursacht durch den Ringmagneten

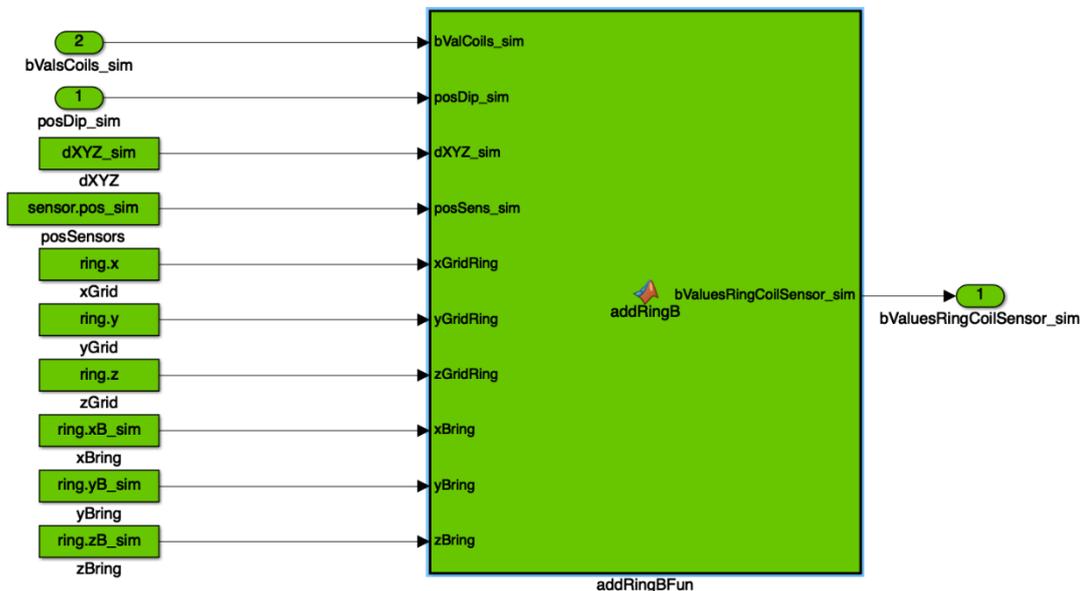


Abbildung 64 Matlabfunktionblock zur Bestimmung und Addition der magnetischen Flussdichte verursacht durch den Ringmagneten

Der Ringmagnet, der die Spulen umschließt, wurde in Vorarbeit auf einem 2,5D-Zentrum mit einer Hallsonde in allen drei Raumrichtungen über einen gerasterten Messraum vermessen. Diese Datensätze werden über folgende Variablen bereitgestellt:

| Variablenname | Beschreibung |
|------------------|--|
| <i>xGridRing</i> | Rasterung in x-Richtung (-110 bis 110 mm) |
| <i>yGridRing</i> | Rasterung in y-Richtung (-110 bis 110 mm) |
| <i>zGridRing</i> | Rasterung in z-Richtung (24 bis 84 mm über Mitte des Rings) |
| <i>xBring</i> | Magnetische Flussdichte in X-Richtung als diskretes Vektorfeld |
| <i>yBring</i> | Magnetische Flussdichte in Y-Richtung als diskretes Vektorfeld |
| <i>zBring</i> | Magnetische Flussdichte in Z-Richtung als diskretes Vektorfeld |

Tabelle 34 Beschreibung der Messdatensätze des Ringmagnetens

Die Parameter *dXYZ_sim* beschreiben die Diskretisierung im Feld, *posDip_sim* die aktuelle Position des Dipols, *posSens_sim* die Positionen der Sensoren und *bValsCoil_sim* die simulierte magnetische Flussdichte an den Positionen der Sensoren und des Dipols.

Im Allgemeinen werden zu allen simulierten magnetischen Flussdichten an den Sensorpunkten und der aktuellen Position des Schwebedipols das B-Feld des Ringmagneten aufaddiert. Für die Bestimmung der Werte werden die vermessenen Datensätze im dreidimensionalen Raum interpoliert.

Falls die Sensoren bezüglich des inertialen Systems verdreht wären, müssten die errechneten Werte transformiert werden.

3.6.3.2.4.2 Test

Die Messdatensätze, die in der Tabelle „Tabelle 36 Beschreibung der Messdatensätze des Ringmagneten“ beschrieben sind, wurden mit nachvollziehbaren Ganzzahlen belegt. Der Vektoren $posSens_sim$ und $dXYZ_sim$ wurden ebenfalls mit überschaubaren Werten belegt. Der Vektor $posDip_sim$ beschreibt die Position des Dipols. Hier wurden die Koordinaten so gewählt, dass man manuell das Ergebnis überprüfen kann. Die Matrix $bValsCoil_sim$ beinhaltet eigentlich die magnetischen Flussdichten, die die Spulen erzeugen. Diese wurden mit einfachen Integerwerten belegt. Die Funktion wurde mit den beschriebenen Werten ausgeführt. Anschließend wurden die Werte manuell von Hand auf Richtigkeit überprüft.

3.6.4 Kraft- und Momentenberechnung (Subsystem 7)

3.6.4.1 Aufbau

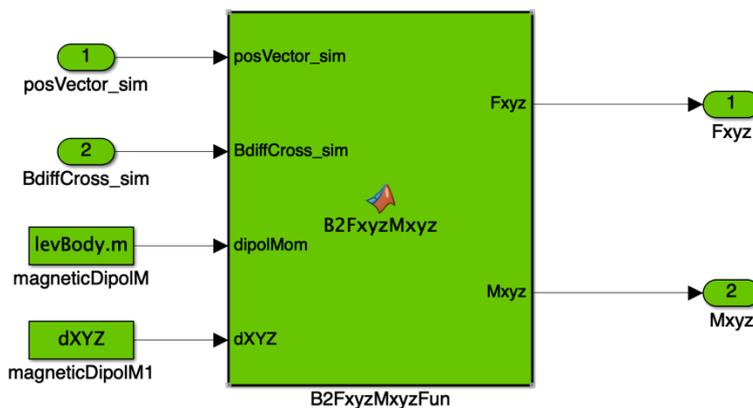


Abbildung 65 Berechnung der wirkenden Kräfte und Momente aus äußerem magnetischem Feld

Für die Berechnung der Kraft- und Momentenberechnung auf den Schwebemagneten durch das Magnetfeld wird die Vorgehensweise in Abschnitt 3.9.2 umgekehrt. Durch die Variable $BdiffCross_sim$ werden die magnetischen Flussdichtewerte, die an der Position des Dipols herrschen, von vorherigen Schritten übergeben. Das magnetische Dipolmoment wird als bekannt angenommen. So kann dann wie in Abschnitt 3.2.7 auf diskrete Weise die wirkende Kraft und das Moment auf den Schwebekörper berechnet werden.

3.6.4.2 Test

Der Test erfolgte gegen die Funktion in Abschnitt 3.9.2. Im Punkt 3.9.2.2 wird dabei der Vorgehensweise erläutert.

3.6.5 Berechnung der magnetischen Flussdichte an den Sensoren (Subsystem 5)

3.6.5.1 Aufbau

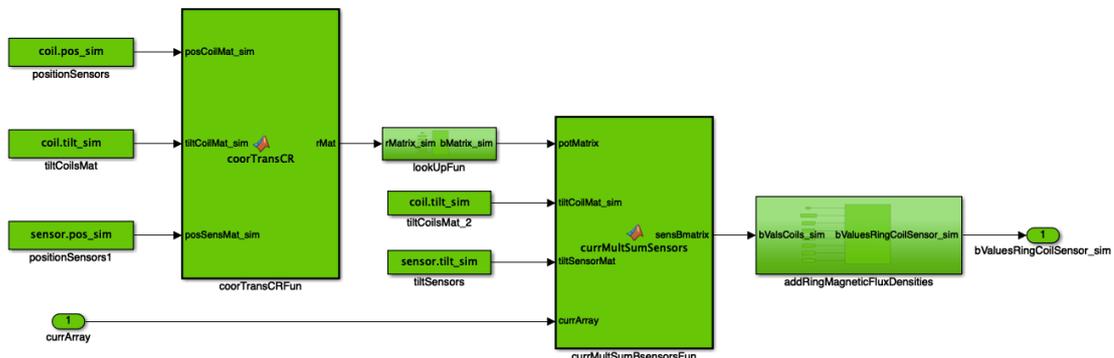


Abbildung 66 Berechnung der magnetischen Flussdichte an Sensorpositionen verursacht durch Spulen und Ringmagnet

Die Funktion in diesem Subsystem ist fast die selbige wie jene, die in Abschnitt 3.9.3.2 erläutert ist. Allerdings werden hier nur die wirkenden magnetischen Flussdichten, die an den Sensoren herrschen berechnet. Dieser Teil soll eigentlich nicht das physikalische Modell beschreiben. Im realen Modell soll dieser Funktionsblock auch bestehen. So kann von den realen Sensorsignalen die erzeugte magnetische Flussdichte von den Spulen und dem Ringmagneten subtrahiert werden. Man erhält nur die magnetische Flussdichte, die von dem Schwebedipol ausgeht. Anhand von diesen Werten soll in Zukunft die Position und Lage des Schwebekörpers berechnet werden.

3.6.5.2 Test

Der Test wurde in diesem Fall vernachlässigt, da dieser in vorheriger Arbeit schon durchgeführt wurde.

3.6.6 Addition der magnetischen Flussdichte des Dipols an den Sensorpositionen (Matlabfunktion 6)



Abbildung 67 Matlabfunktion-Block: Addition der magnetischen Flussdichte des Dipols an den Sensorpositionen

3.6.6.1 Aufbau

Mit den Variablen `bValuesRingCoil_sim` werden die magnetischen Flussdichten, die vom Ringmagneten und von den Spulen an den Sensorpositionen wirken, geliefert. Die Variable `bValuesDip` stellt die Werte, die vom Schwebemagnet ausgehen. Diese Flussdichten werden entsprechend ihrer Raumrichtung und Sensorposition aufaddiert. Das Signal `bValRingCoilDip_sim` entspricht dann dem Messsignal, das die Sensoren im realen Versuchsaufbau liefern. Im Anschluss werden in diesem Modell die magnetischen Flussdichten vom Ringmagneten und von den Spulen wieder subtrahiert. Somit könnte man die Blöcke einfach weglassen, aber das Simulationsmodell soll in Zukunft der rea-

len Strecke entsprechen. Dies hat den Sinn, dass das Modell einfach mit der realen Strecke ersetzt werden kann. Außerdem könnten so entsprechende Abweichungen und Messfehler simuliert werden.

3.6.6.2 Test

In einem Skript wurden die entsprechenden zwei Arrays für die Variablen *bValuesRingCoil_sim* und *bValueDip* mit Werten belegt. Anschließend wird die Funktion aufgerufen. Zur Verifizierung wurden die berechneten mit den vorgegebenen subtrahiert. Es muss sich dabei eine komplette Summe von null ergeben.

3.6.7 Berechnung der magnetischen Flussdichte verursacht durch den Dipol durch Subtraktion von äußerem Feld an den Sensorpositionen (Matlabfunktion 8)



Abbildung 68 Matlabfunktion Block: Berechnung der magnetischen Flussdichte durch Subtraktion des äußeren Magnetfelds

3.6.7.1 Aufbau

Die Variable *bRingCoilDip* liefert die Messdaten, die man auch vom realen System erhalten würde. Diese beinhalten die magnetischen Flussdichten, die vom Ringmagnet, Spule und Dipol verursacht werden. *bRingCoil* liefert berechnete Werte, die durch den anliegenden Strom an den Spulen verursacht wurden und den interpolierten Werten des Ringmagneten. Diese Größen werden entsprechend ihrer Raumrichtung und Sensorposition voneinander subtrahiert. So erhält man die magnetische Flussdichte, die der Dipol mit seiner aktuellen Lage und Position an den Messpunkten bewirkt. Mit diesen Werten soll in Zukunft die Messung der aktuellen Position und Lage des Dipols mit einem Algorithmus erfolgen.

3.6.7.2 Test

In einem Skript wurden die entsprechenden Werte für die Arrays *bRingCoilDip* und *bRingCoil* definiert. Anschließend erfolgte der Funktionsaufruf. Die berechneten Werte wurden anschließend mit den Vorgabewerten verglichen.

3.6.8 Evaluierung des Simulationsmodells

3.6.8.1 Test durch Vorgabe von Kraft und Position

Als erster Test des gesamten Modells wurden Kräfte, Momente und eine Position des Dipols vorgegeben. Nach anschließender Simulation ergeben sich am Ende der Simulation die gleichen Kräfte und Momente wie in der Vorgabe. Es sind nur sehr geringe Abweichungen zu erkennen, die auf Rechenungenauigkeit von Matlab zurückzuführen sind. Diese Abweichungen bewegen sich im Bereich von 10^{-10} Newton oder Newtonmeter.

3.6.8.2 Test durch Vorgabe von verschiedenen Positionen und statisch wirkender Kräfte und Momente

In folgender Simulation wurde der Schwebedipol auf der Rotationsachse (Z-Achse im inertialen System) virtuell bewegt. Die Kräfte in X- und Y-Richtung wurden gleich null gesetzt. Ebenfalls sollten keine Momente auf den Körper wirken. Die Kraft in Z-Richtung sollte nur die Gewichtskraft des Magneten kompensieren. Die Vorgabewerte wurden am Ende der Simulation durch die wirkenden Kräfte und Momente bestätigt. Jedoch soll dieser Versuch zeigen, dass der Bestromungsalgorithmus der Spulen noch angepasst werden muss. Folgendes Diagramm zeigt die Stromhöhen, die durch das Lösen des Gleichungssystem (3.9.3.1.3) für die geforderten magnetischen Flussdichten an den definierten Punkten entstehen.

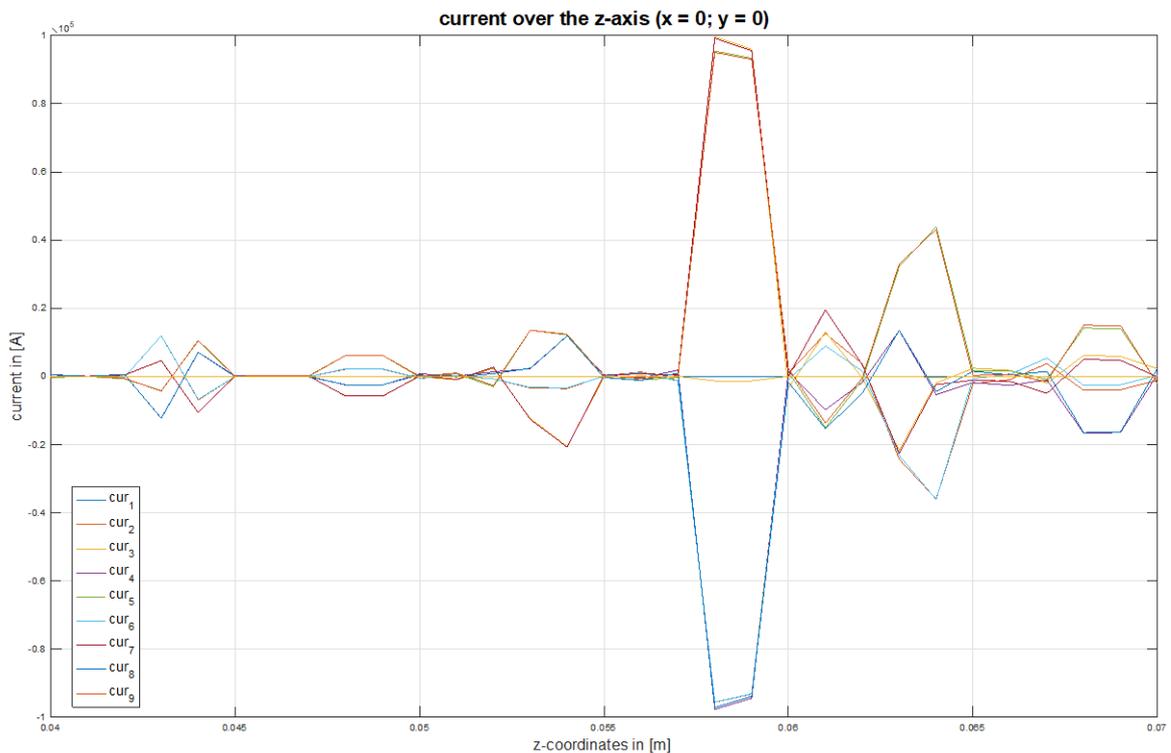


Abbildung 69 Bestromung der Spulen für statische Kräfte über verschiedene Positionen auf der Z-Achse

Die Ströme sind in der Simulation noch unrealistisch hoch. Aber es ist zu beobachten, dass dies nur für bestimmte Bereiche gilt. Dies ist zurückzuführen auf die Stromberechnung über ein Gleichungssystem. Nach genauerer Betrachtung kann man darauf schließen, dass es nur eine mögliche Lösung für das Gleichungssystem gibt. Für dieses Gleichungssystem kann man nach einer Betrachtung folgern, dass sich nur eine Lösung ergibt, um es zu lösen. Ein verbesserter Ansatz würde die technischen Realisierungsmöglichkeiten miteinbeziehen. Wichtig dabei ist, dass man die Werte aus der Feldberechnung möglichst genau einhält. Kleine Abweichungen ergeben einen großen Unterschied für die Kraft- und Momentenwirkung.

Weiterhin ist zu beobachten, dass sich die Ströme verschiedener Spulen genau entgegengesetzt ausrichten. Dies liegt an der symmetrischen Anordnung der Spulen in einem Teilkreis. Sie wirken dabei in eine Richtung. Die entgegengesetzten Ströme erklärt die folgende Grafik für diesen symmetrischen Fall (Schwebekörper: X-Koordinate = 0; Y-Koordinate = 0).

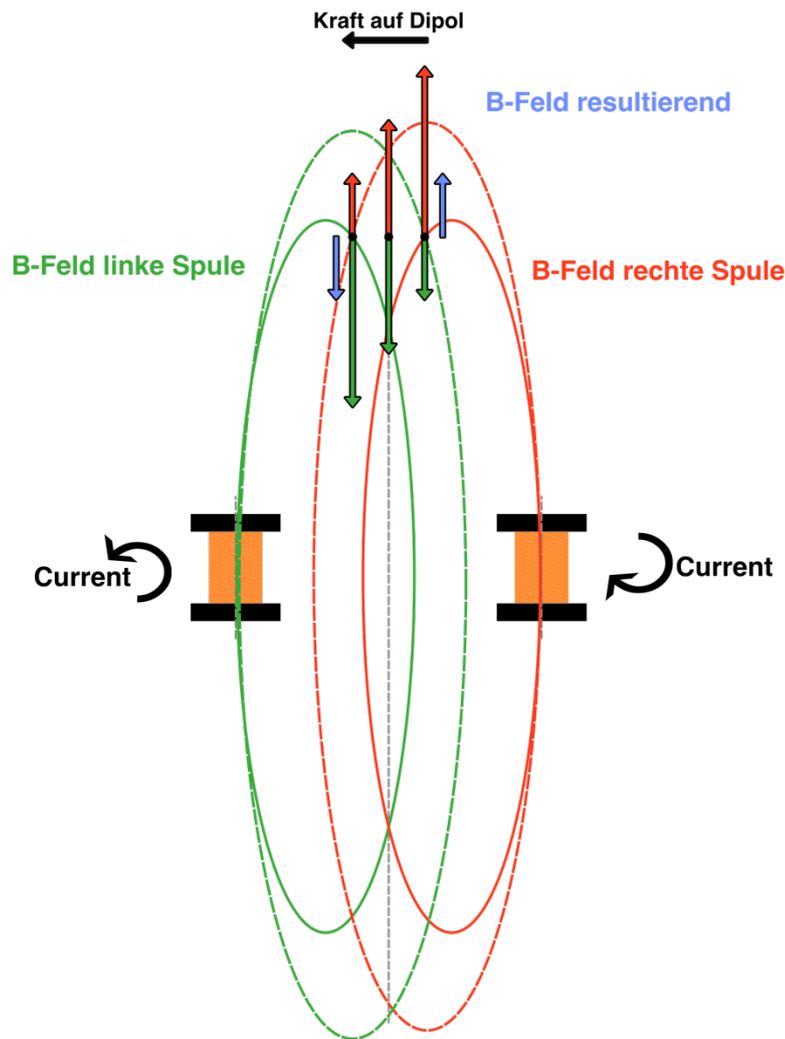


Abbildung 70 Kraftwirkung zweier Spulen auf einen Dipol

Da sich eine Spule links und die andere rechts vom Dipol befindet, müssen die Stromrichtungen entgegengesetzt sein. Das heißt ein Spulenpaar wirkt in diesem Fall sozusagen gemeinsam auf den Schwebekörper.

Im idealen Fall wären die beiden zusammengehörigen Ströme gleich hoch. Jedoch zeigt das Diagramm kleine Asymmetrien. Diese sind auf die Ungenauigkeiten der Messdaten, Interpolationsfehler und Magnetisierungsunterschiede des Ringmagneten zurückzuführen.

3.6.9 Weiterführende Arbeiten und Lösungsansätze

3.6.9.1 Positionsbestimmung mit Hilfe des zweiten Axioms von Newton und des Drallsatzes

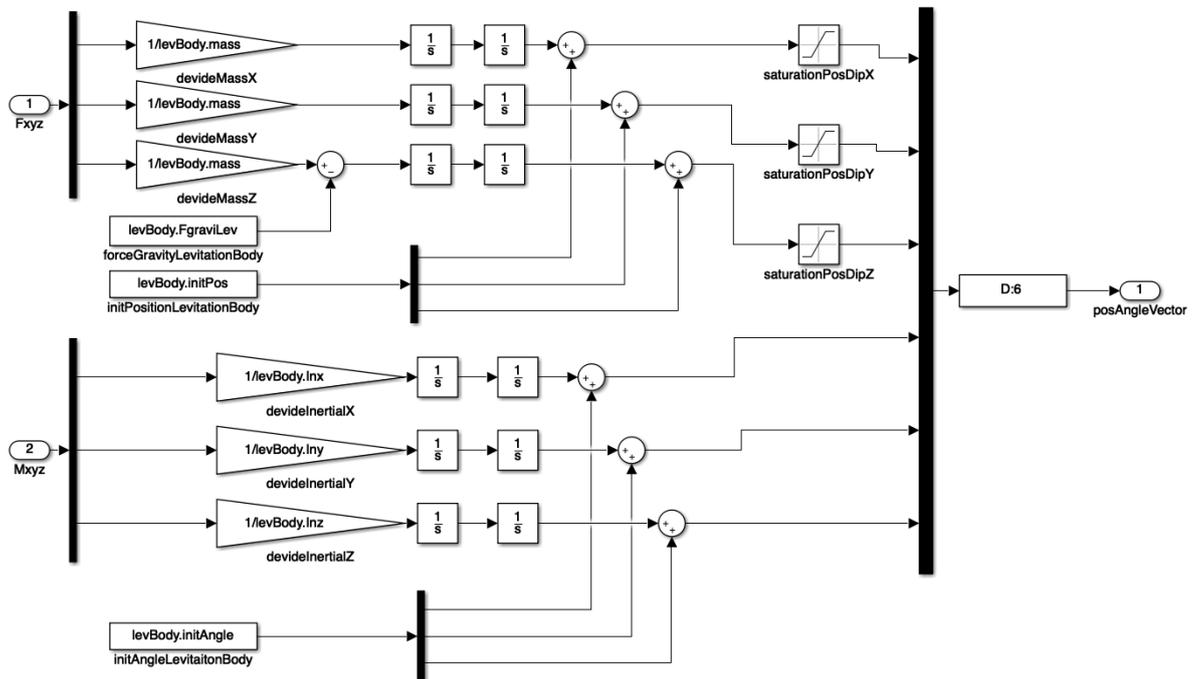


Abbildung 71 Simulink-Modell zur Positions- und Lagebestimmung mit dem zweiten Axiom von Newton und dem Drallsatz

Die Position- und Lagebestimmung des Schwebekörpers für das physikalische Modell der Regelstrecke könnte man, wie in oberer Abbildung dargestellt ist, in Simulink implementieren. Als Eingang erhält man aus vorherigen Berechnungen die Kraft in X-, Y- und Z-Richtung (F_{xyz}) und die Momente um die X-, Y- und Z-Achse (M_{xyz}) im inertialen Koordinatensystem.

Für die Kräfte beziehungsweise Beschleunigungen gilt:

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m}$$

$$a_z = \frac{F_z}{m} - F_g$$

Durch doppelte Integration der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ erhält man die Position $\vec{s}(t)$.

$$\vec{s}(t) = \int \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt$$

Wichtig dabei ist es, einen Startpunkt vorzugeben. In diesem Fall wurde der Vektor *levBody.initPos* einfach auf die entsprechenden Daten aufaddiert. Um den Simulationsraum zu begrenzen, wurden Sättigungsblöcke (*saturationPosDipX*, *saturationPosDipY* und *saturationPosDipZ*) verwendet. Ansonsten würde der Schwebekörper bei instabilen Verhalten ins unendliche Fallen. Außerdem gäbe es sonst keine Systemgrenzen.

Analog kann die Lagebestimmung mit dem Drallsatz durchgeführt werden. Als Eingang erhält man ein Moment um die X-, Y- oder Z-Achse (M_{xyz}). Allerdings müssen als erstes die Inertialmomente des Schwebekörpers berechnet werden:

$$J_x = \frac{m}{4} * \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$

$$J_y = \frac{m}{4} * \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$

$$J_z = \frac{m}{2} * r^2$$

Nun können die Winkelbeschleunigungen berechnet werden:

$$\alpha_x = \frac{M_x}{J_x}$$

$$\alpha_y = \frac{M_z}{J_z}$$

$$\alpha_z = \frac{M_z}{J_z}$$

Durch doppeltes Integrieren der Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}(t)$ kann die Lage des Schwebekörpers $\vec{\varphi}(t)$ berechnet werden:

$$\vec{\varphi}(t) = \int \vec{\omega}(t) dt$$

$$\vec{\omega}(t) = \int \vec{\alpha}(t) dt$$

Zusätzlich kann eine Startlage (*levBody.initAngle*) des Schwebekörpers festgelegt werden. Hier wird von Begrenzungen abgesehen, da der es bei der Verdrehung Schwebedipols keine Systemgrenzen gibt.

3.6.9.2 Positions- und Lagebestimmung durch die wirkenden magnetischen Flussdichten an den Sensoren

Um die Position und Lage durch den Einsatz von Hallsensoren zu bestimmen, muss ein geeignetes Verfahren, das am besten auf realen Messdaten basiert, entwickelt werden. Interpolationsverfahren und binäre Logiken würden sich dabei anbieten. Eine andere Möglichkeit wäre, das physikalische Modell eines Dipols zu verbessern oder genauer zu definieren. Dann könnte man den Ansatz, der im Anhang beschrieben ist, nutzen.

3.6.9.3 Algorithmus zur Bestromung der Spulen

Um die beschriebenen hohen Ströme (Abschnitt 3.9.8.2) zu verringern, können die Anordnung, Neigung und Anzahl der Spulen variiert beziehungsweise optimiert werden. Zudem stellt sich noch die Problematik des Bestromungsalgorithmus. Im betrachteten Fall werden neun magnetische Flussdichten festgelegt, um die gewünschte Kraftwirkung zu erzielen. Um das System zu lösen, werden neun Parameter beziehungsweise Spulen benötigt. Dieser Fall gilt allerdings nur, wenn das körperfeste Koordinatensystem des Dipols gegenüber dem des inertialen Systems nicht verdreht ist. Das heißt, die beiden Z-Achsen müssen parallel zueinander liegen. Um die allgemeine Konstellation zu betrachten, müssen an allen sieben Punkten des Differenzenkreuzes alle drei magnetischen Flussdichten definiert sein. Das heißt, es müssten 21 Parameter vorgegeben werden, um eine Kraft definiert vorzugeben. Um diese Problemstellung zu lösen, muss das Feld der Spulen und die Möglichkeiten der Überlagerung genauer untersucht werden.

3.6.9.4 Physikalischer Aufbau

Mit den folgenden Untersuchungen und Experimenten können verschiedene Punkte zur Bauteilauswahl und fortführende Arbeiten für den zukünftigen realen Versuchsaufbau getroffen werden:

- a) Jede Spule soll unabhängig von ihrem ohmschen Widerstand mit einem definierten Strom versorgt werden. Falls sich die Spule erwärmt, ändert sie ihren Widerstand. Dadurch ist eine genaue Stromsteuerung über Vorgabe einer Spannung in Bezug auf den Widerstand nicht möglich. Es bieten sich viele mögliche Schaltungen an. Ein Beispiel wird in Abschnitt 3.4.1.2 dargestellt. Diese Schaltung wurde auch schon getestet und mit einer einzelnen Spule in Betrieb genommen. Hier ist ein Kühlkörper für den Leistungsoperationsverstärker vorzusehen.
- b) Durch die Bestromung erwärmen sich die Spulen. Deshalb sollten diese so dimensioniert werden, dass nur die Leistungsaufnahme möglichst klein gehalten wird. Ansonsten muss man eine Kühlmöglichkeit der Spulen vorsehen.
- c) Bei der Auswahl der Spulen sollte eine so hohe Windungszahl wie möglich angestrebt werden. Jedoch steigt mit Erhöhung der Windungen die Induktivität und damit die Zeitkonstante. Diese beschreibt die Dynamik der Spule. Je höher der ohmsche Widerstand ist, desto niedriger wird die Zeitkonstante. Die Zeitkonstante wird ebenfalls vom Innenwiderstand der Spannungsquelle beeinflusst.
- d) Bei der Auswahl des Kerns ist in der Regel ein Material mit hoher magnetischer Permeabilität zu bevorzugen. So wird weniger Strom für die Erzeugung der gleichen magnetischen Flussdichte benötigt. Bei ferromagnetischen Stoffen bildet sich jedoch dabei aber eine gewisse Hysteresekurve, die sogenannte Ummagnetisierungskurve. Diese führt zu Nichtlinearitäten und muss dann in Modell und Realisierung berücksichtigt werden.
- e) Der Schwebedipol sollte so stark sein, dass er an den Positionen einen ausreichend großen Messpegel erreicht. Die ausgearbeitete Simulation sollte die Auslegung dann ermöglichen.
- f) Als Vorschlag für die eindimensionalen Hallsensoren ist im Anhang ein Datenblatt beigefügt. Innovativere Sensoren wurden vom Fraunhofer Institut unter dem Namen HallinOne entwickelt. Diese Sensoren können auf einem Chip alle drei Raumkomponenten der magnetischen Flussdichte erfassen.
- g) Für den großen Ringmagneten gibt es nur wenige Hersteller. Dadurch ist man in der Auswahl begrenzt.
- h) Als physikalischen Aufbau, der als Grundgerüst für das Experiment dient, könnte man ein additives Fertigungsverfahren in Erwägung ziehen. Es ermöglicht einem eine einfache Fertigung. Außerdem beeinflusst ein Aufbau aus Kunststoff die Magnetfelder nur minimal. Zudem bietet es viele Möglichkeiten in der Konstruktion, die andere Fertigungsverfahren nur mit sehr hohem Kostenaufwand mit sich bringen.
- i) Für die Spannungsversorgung der Hallsensoren bieten sich Festspannungsregler an. Diese liefern eine konstante Spannung (meist 5 V) und sind kostengünstig. Dabei schützen sie die Sensoren auch vor Überspannung, die durch falsche Verdrahtung beim Versuchsaufbau entstehen können.

4 Fazit und Ausblick

Die Simulation zeigt für beide Versuchsfälle, dass ein solcher Aufbau machbar ist. Jedoch sollte zuerst der physikalische Aufbau für den einfachen Magnetschwebeversuch genau untersucht, analysiert und ausgelegt sein. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse können dann in die Simulation des Plattformmagnetschwebeversuchs einfließen. Jedoch sollte auch für den Plattformschwebeversuch ein aus der zukünftigen Simulation hervorgehender Prototypenaufbau angefertigt werden. Dieser bringt sicherlich Probleme mit sich, die in der Simulation nicht berücksichtigt worden sind. Hier werden Hardware- und Fertigungsprobleme auftreten. Mit den gewonnenen Erkenntnissen sollte anschließend wieder in die Simulation gegangen werden und diese berücksichtigt beziehungsweise gelöst werden. Unabhängig vom Versuch können verschiedene Untersuchungen zur Realisierung des Projekts beitragen.

- a) Es sollte ein intelligenter Algorithmus zur Bestromung der Spulen, der zur Erzeugung eines gewünschten Magnetfelds führt, entwickelt werden. Das Ziel ist es, die Leistungsaufnahme der Spulen zu minimieren. Dazu müssen die Spulen richtig angeordnet sein und auch bestromt werden. Um schnell zielführende Ergebnisse zu erzielen, sollte der Einsatz einer Software, mit der sich numerische Feldberechnungen durchführen lassen, ins Auge gefasst werden. So können mit den gewonnenen Erkenntnissen fundierte Ansätze zur Problemlösung erstellt werden.
- b) Für eine geringe Leistungsaufnahme und möglichst starke Magnetfelder sind Kerne in den Spulen notwendig. Allerdings entsteht hier eine Wechselwirkung zwischen den Ferritkernen und dem Schwebedipol. Diese müssen berücksichtigt und untersucht werden. So könnte man diese in den Simulationsmodellen mitberücksichtigen.
- c) Die Positions- und Lageerfassung war ursprünglich geplant über Hallsensoren. Über die aufgenommenen magnetischen Flussdichten sollte über ein physikalisches Modell, das die Flussdichte im Raum darstellt, zurückgerechnet werden. Allerdings stimmen diese Modelle mit der Realität nur qualitativ überein. Um dieses Problem zu lösen, sind genauere Modelle oder der Einsatz von richtigen Messdaten mit dementsprechenden Algorithmen notwendig.

Abschließend kann man sagen, dass dieses Forschungsgebiet noch großes Potenzial in sich birgt. Zudem können die in Zukunft gewonnenen Erkenntnisse für weitere technische Anwendungsfälle genutzt werden.

Anhang:

4.1 Lage- und Positionsbestimmung Herleitung

Über das physikalische Modell des Dipols ohne Berücksichtigung dessen Geometrie und Messungen der magnetischen Flussdichten mit Hallsensoren in allen drei Raumrichtungen kann die Position- und Lage des Schwebedipols berechnet werden. Hierzu werden an der folgenden Formel verschiedene Substituierungen, geometrische Darstellungen und Umformungen vorgenommen. Für die erfolgreiche Realisierung dieser Idee ist es allerdings notwendig, dass das physikalische Modell mit der Realität sehr gut übereinstimmt. In dieser Arbeit konnte dieser Zusammenhang nicht bestätigt werden. Deshalb wird diese Herleitung in der Realität höchstwahrscheinlich nicht funktionieren, außer man verbessert das physikalische Modell.

$$\vec{b}_i^{(l)} = \frac{\mu_0}{|r_i|^3} * \frac{(3 * \vec{r}_i * \vec{r}_i^T - \underline{1} * |r_i|^2)}{|r_i|^2} * \vec{m}^{(l)}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|-------------------|--|
| $\vec{b}_i^{(l)}$ | Magnetfeldmessung i im inertialen System, Bezeichnung \vec{b}_i |
| \vec{r}_i | Positionsvektor vom Magneten zum Messort |
| $\vec{m}^{(l)}$ | Dipolvektor im inertialen System; $ \vec{m}^{(l)} = m$: wird als bekannt vorausgesetzt |
| $\vec{m}^{(b)}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{bmatrix} :=$ Dipolvektor im körperfesten System |
| \vec{p} | Positionsvektor des Magneten |
| \vec{c}_i | Messort |
| \vec{r}_i | $= \vec{c}_i - \vec{p}$ |

Tabelle 35 Erklärung der Parameter zum Dipolmodell für Position- und Lagebestimmung

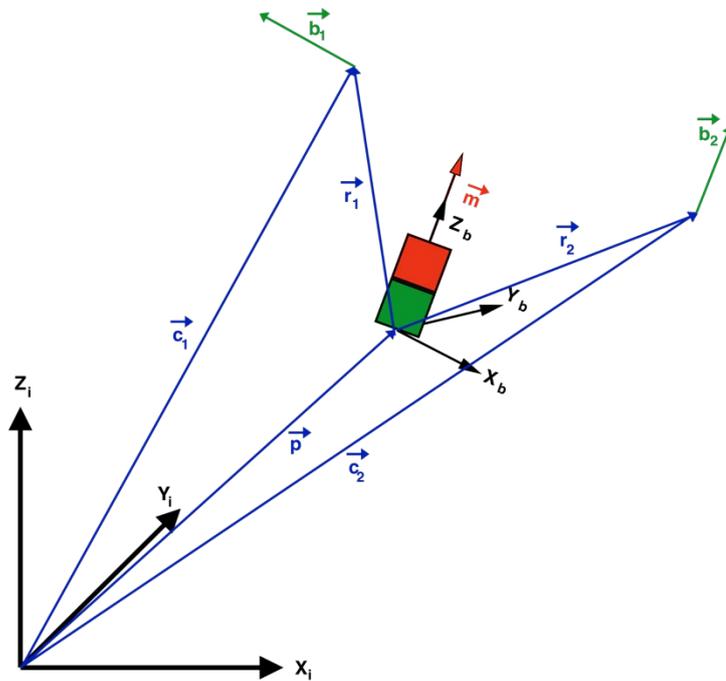


Tabelle 36 Position- und Lagebestimmung abhängig von zwei Messpunkten

Der Richtungsvektor vom Magneten zum Messort wird mit dem normierten Vektor \vec{v}_i beschrieben. In Bezug auf die Zeichnung beschreibt \vec{v}_i die Richtung von \vec{r}_i .

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{c}_i - \vec{p}}{|\vec{c}_i - \vec{p}|}$$

Durch Einsetzen der beiden Ausdrücke in die physikalische Modellgleichung ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{c}_i - \vec{p}}{|\vec{c}_i - \vec{p}|}$$

$$\vec{r}_i = \vec{c}_i - \vec{p}$$

$$\vec{b}_i^{(i)} * \frac{\mu_0}{|\vec{r}_i|^3} = (3 * \vec{v}_i * \vec{v}_i^T - \underline{1}) * \vec{m}$$

Für weitere Ansätze werden folgende Ausdrücke mit verschiedenen Variablen ersetzt:

$$\vec{d}_i = (3 * \vec{v}_i * \vec{v}_i^T - \underline{1}) * \vec{m}$$

Dabei ergibt sich, dass \vec{d}_i parallel zu \vec{b}_i ist und $\frac{\mu_0}{|\vec{r}_i|^3}$ nur als skalierender Faktor dient.

Damit ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\Rightarrow \vec{b}_i = \lambda_i * \vec{b}_{iu}; \vec{b}_{iu} = \frac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|}$$

| Formelzeichen | Erklärung |
|-------------------|--|
| $\vec{b}_i^{(i)}$ | Bekannte magnetische Flussdichte |
| $ \vec{r}_i ^3$ | Unbekannter Skalar |
| \vec{v}_i | Betrag des Vektors = 1; bekannt |
| $\vec{m}^{(b)}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{bmatrix}$:= Dipolvektor im körperfesten System, bekannt |
| \vec{k}_i | $\frac{\mu_0}{ \vec{c}_i - \vec{p} ^3}$ aus obigem Ausdruck |

$$\vec{d}_i \quad \left(3 * \vec{v}_i * \vec{v}_i^T - \underline{I} \right)$$

Tabelle 37 Erklärung der Parameter zum Dipolmodell für Position- und Lagebestimmung

Die Wertemenge der Lösungen von den Vektoren \vec{d}_i können geometrisch als Kugel mit dem Mittelpunkt $\frac{\vec{m}}{2}$ und dem Radius $\frac{3}{2} * |\vec{m}|$ gedeutet werden.

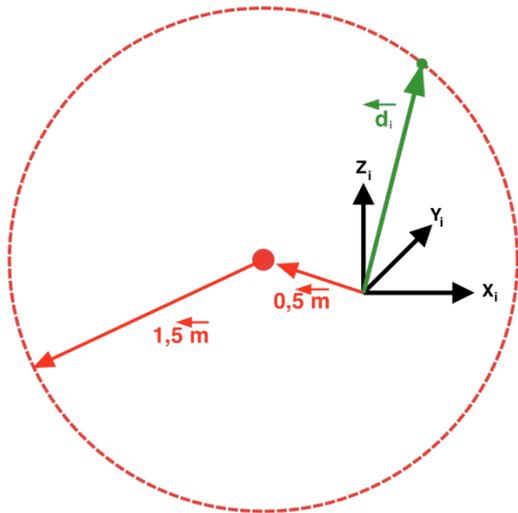


Abbildung 72 Grafische Darstellung der Formel zur Positions- und Lagebestimmung

Hier werden die Vektoren \vec{d}_i in Abhängigkeit von dem magnetischen Dipolmoment \vec{m} bestimmt.

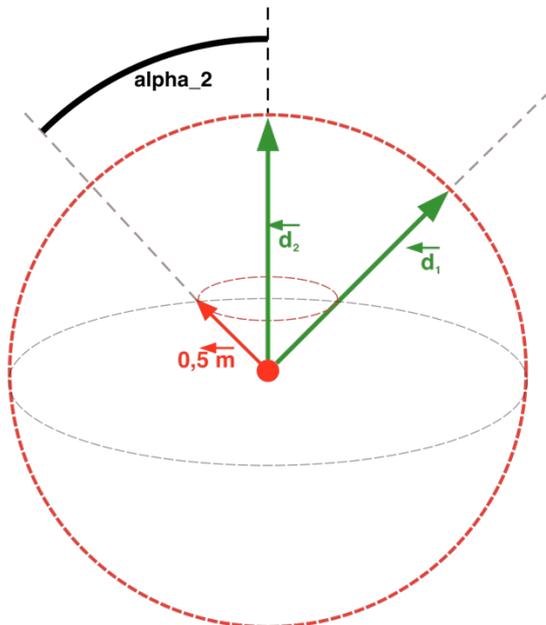
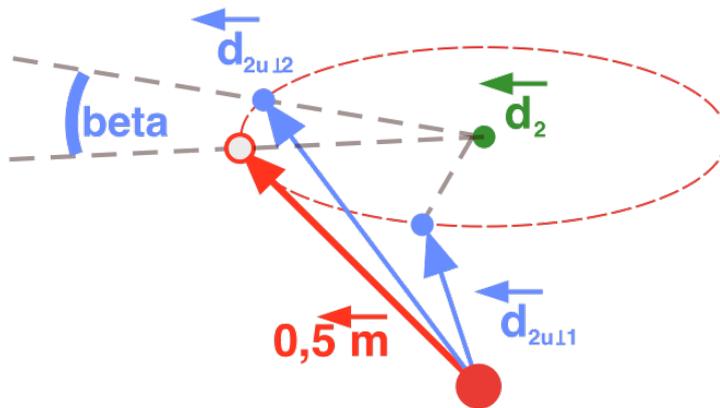


Abbildung 73 Bestimmung der Abhängigkeiten von \vec{d}_i

Abbildung 74 Bestimmung der Abhängigkeiten von \vec{d}_1

In diesem Fall dürfen die beiden betrachteten magnetischen Flussdichten \vec{b}_{iu} nicht parallel zueinander liegen. Für diesen Fall müssten mehrere Messorte vorgesehen werden. So kann in diesem Fall eine andere magnetische Flussdichte an einem anderen Ort betrachtet werden.

$$\vec{b}_{2u\perp 1} = \frac{\vec{b}_{1u} * \vec{b}_{2u}}{|\vec{b}_{1u} * \vec{b}_{2u}|}$$

$$\vec{b}_{2u\perp 2} = \vec{b}_{2u\perp 1} * \vec{b}_{2u}$$

$$\frac{m}{2} = (\cos \alpha_2 * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * (\vec{b}_{2u\perp 1} * \cos \beta_2 + \vec{b}_{2u\perp 2} * \sin \beta_2)) * \frac{m}{2}$$

$$\left| \lambda_i * \vec{b}_{iu} - \frac{m}{2} \right| = \frac{3}{2} * |m|$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda_i * \vec{b}_{iu} - \frac{m}{2} \right) * \left(\lambda_i * \vec{b}_{iu} - \frac{m}{2} \right)^T = \frac{9}{4} * m^2$$

$$\lambda_i^2 - 2 * \lambda_i * \vec{b}_{iu}^T * \frac{m}{2} - 2 * m^2 = 0$$

$$\lambda_{i1,2} = \text{Auswertung folgt}$$

Mögliche Richtungen von \vec{v}_i bestimmen

$$\vec{d}_i + \vec{m} \parallel \vec{v}_i$$

\vec{c}_1, \vec{c}_2 sind Messpunkte

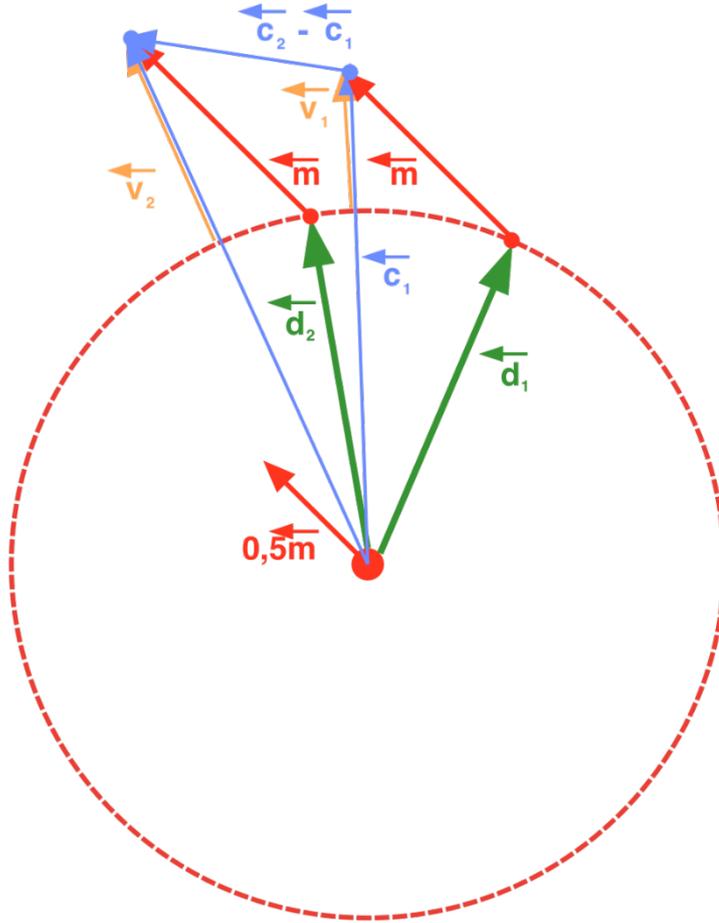


Abbildung 75 Zusammenhang zwischen \vec{d}_i und \vec{v}_i

Aus der Geometrie: \vec{v}_1, \vec{v}_2 und \vec{c}_{12} müssen in einer Ebene liegen:

$$\Leftrightarrow \det[[\vec{v}_1 \vec{v}_2 \quad (\vec{c}_2 - \vec{c}_1)]] := 0 \quad (*A)$$

Für λ_2 :

$$\lambda_2^2 - 2\lambda_2 * \vec{b}_{2u}^T * \frac{m}{2} * (\cos \alpha_2 * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * (b_{2u\perp 1} * \cos \beta_2 + b_{2u\perp 2} * \sin \beta_2)) - 2 * m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2^2 - \lambda_2 * m \left(\cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 * \left(\vec{b}_{2u}^T * \vec{b}_{2u\perp 1} * \cos \beta_2 + \vec{b}_{2u}^T * \vec{b}_{2u\perp 2} * \sin \beta_2 \right) \right) - 2 * m^2 = 0$$

$$\vec{b}_{2u}^T * \vec{b}_{2u\perp 1} = 0$$

$$\vec{b}_{2u}^T * \vec{b}_{2u\perp 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 - \lambda_2 * m * \cos \alpha_2 - 2 * m^2 = 0$$

$$\lambda_{2-1/2} = + \frac{m}{2} * \cos \alpha_2 \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} * \cos^2 \alpha_2 + \frac{8}{4} * m^2}$$

$$\lambda_{2-1/2} = + \frac{m}{2} * \cos \alpha_2 \pm \sqrt{? + \cos^2 \alpha_2}$$

$$\lambda_2 = +\frac{m}{2} * (\cos \alpha_2 \pm \sqrt{? + \cos^2 \alpha_2})$$

$$\rightarrow \vec{d}_2 = \lambda_2 * \vec{b}_{2u} = \frac{m}{2} * (\sqrt{8 + \cos^2 \alpha_2}) * \vec{b}_{2u}$$

Für λ_1 :

$$\lambda_1^2 - 2 * \lambda_1 * \vec{b}_{1u}^T * \frac{m}{2} * (\cos \alpha_2 * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * (\vec{b}_{2u\perp 1} * \cos \beta_2 + \vec{b}_{2u\perp 1} * \sin \beta_2)) - 2 * m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^2 - 2 * m * (\cos \alpha_2 * \vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * (\vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u\perp 1} * \cos \beta_2 + \vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u\perp 2} * \sin \beta_2)) - 2 * m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^2 - 2 * m * (\cos \alpha_2 * \vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * \sin \beta_2 * \vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u\perp 2}) - 2 * m^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1(\alpha_2, \beta_2) = +\frac{m}{2} (\cos \alpha_2 * \vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * \sin \beta_2 * \vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u\perp 2})$$

$$+ \sqrt{\frac{m^2}{4} * (\cos \alpha_2 * \vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * \sin \beta_2 * \vec{b}_{1u}^T * \vec{b}_{2u\perp 2})^2 + 2 * m^2}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{m}{2} * (\sqrt{8 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2} * \vec{b}_{2u} + m(\cos^2 \alpha_2 * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * (\vec{b}_{2u\perp 1} * \sin \beta_2 + \vec{b}_{2u\perp 2} * \sin \beta_2)))$$

$$\vec{m} = m(\cos^2 \alpha_2 * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * (\vec{b}_{2u\perp 1} * \sin \beta_2 + \vec{b}_{2u\perp 2} * \sin \beta_2))$$

$$\vec{v}_1 = \vec{d}_1 + \vec{m} = \lambda_1 * (\lambda_2 + \beta_2) * \vec{b}_{1u} + \vec{m}$$

Von (*A):

$$\det(\beta_2) = \det[[\lambda_2(\alpha_2) * \vec{b}_{2u} + m(\alpha_2, \beta_2) * \vec{v}_1(\alpha_2, \beta_2) \quad (\vec{c}_2 - \vec{c}_1)]]$$

$$\rightarrow \beta_2 = \beta_2(\alpha_2)$$

Alternative zu (*A):

$$\vec{v}_1^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * \vec{v}_2 := 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 * \vec{b}_{1u} + \vec{m})^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * (\lambda_1 * \vec{b}_{2u} + \vec{m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 * \vec{b}_{1u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * \lambda_2 * \vec{b}_{1u} + \lambda_1 * \vec{b}_{1u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * \vec{m} - \lambda_2 * \vec{b}_{2u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * \vec{m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 * \vec{b}_{1u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * \vec{\lambda}_2 * \vec{b}_{2u} + (\lambda_1 * \vec{b}_{1u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) - \lambda_2 * \vec{b}_{2u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1)) * (m(\cos \alpha_2 * \vec{b}_{2u} + \sin \alpha_2 * (\vec{b}_{2u\perp 1} * \sin \alpha_2 (b_{2u\perp 1} * \sin \beta_2 + \vec{b}_{2u\perp 2} * \sin \beta_2))) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 * \vec{b}_{1u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * \vec{\lambda}_2 * \vec{b}_{2u} + \lambda_1 * \vec{b}_{1u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * (\cos \alpha_2 * \vec{b}_{2u\perp 1} * \cos \beta_2 + \vec{b}_{2u\perp 2} * \sin \beta_2) - \lambda_2 * m * \vec{b}_{2u}^T * (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) * (0 + \sin \alpha_2 (b_{2u\perp 1} * \cos \beta_2 + b_{2u\perp 1} * \sin \beta_2)) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{m}{2} * \left(\cos \alpha_2 + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha_2} \right) * \frac{m}{2} \\
&\quad * \left(\left((\cos \alpha_2 + \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u}} + \sin \alpha_2 * \sin \beta_2 * \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u\perp 2}}) + \sqrt{(\text{?})^2 + 8} \right) \right. \\
&\quad * \overrightarrow{b_{1u}^T} + \tilde{c} * \overrightarrow{b_{2u}} + \frac{m^2}{2} * \left(\cos \alpha_2 + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha_2} \right) * \overrightarrow{b_{1u}^T} * \tilde{c} \\
&\quad * \left(\cos \alpha_2 * \overrightarrow{b_{2u}} + \sin \alpha_2 (\overrightarrow{b_{2u\perp 1}} * \cos \beta_2 + \overrightarrow{b_{2u\perp 1}} * \sin \beta_2) \right) \\
&\quad + \sqrt{(\cos \alpha_2 + \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u}} + \sin \alpha_2 * \sin \beta_2 * \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u\perp 2}})^2 + 8} - \frac{m^2}{2} \\
&\quad \left. * \left(\cos \alpha_2 + \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u}} + \sin \alpha_2 * \sin \beta_2 * \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u\perp 2}} \right) \right) = 0
\end{aligned}$$

Substitution um β_2 zu berechnen

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{1}{m^2} \\
A_1 &= \left(\cos \alpha_2 + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha_2} \right) \\
\lambda_2 &= \frac{m}{2} * \left(\cos \alpha_2 + \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u}} \right. \\
&\quad \left. + \sin \alpha_2 * \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u\perp 2}} * \sin \beta_2 + \sqrt{(A_1 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} \right) \\
A_2 &:= \cos \alpha_2 + \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u}} \\
A_3 &:= \sin \alpha_2 * \overrightarrow{b_{1u}^T} * \overrightarrow{b_{2u\perp 2}} \\
A_4 &:= \overrightarrow{b_{1u}^T} * \tilde{c} * \overrightarrow{b_{2u}} \\
A_5 &:= \overrightarrow{b_{1u}^T} * \tilde{c} * \overrightarrow{b_{2u}} * \cos \alpha_2 \\
A_6 &:= \overrightarrow{b_{1u}^T} * \tilde{c} * \overrightarrow{b_{2u\perp 1}} * \sin \alpha_2 \\
A_7 &:= \overrightarrow{b_{1u}^T} * \tilde{c} * \overrightarrow{b_{2u\perp 2}} * \sin \alpha_2 \\
A_8 &:= \overrightarrow{b_{1u}^T} * \tilde{c} * \overrightarrow{b_{2u\perp 1}} * \sin \alpha_2 \\
A_9 &:= \overrightarrow{b_{1u}^T} * \tilde{c} * \overrightarrow{b_{2u\perp 2}} * \sin \alpha_2
\end{aligned}$$

Aus vorherigen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{m^2}{4} * A_1 * \left(A_2 + A_3 * \sin \beta_2 + \sqrt{(A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} \right) * A_4 + \frac{m}{2} * A_1 \\
&\quad * \left(A_5 + A_6 * \cos \beta_2 + A_7 * \sin \beta_2 \right) - \frac{m^2}{2} \\
&\quad * \left(A_2 + A_3 * \sin \beta_2 + \sqrt{(A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} \right) \\
&\quad * \left(A_8 * \cos \beta_2 + A_9 * \sin \beta_2 \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{(A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} * (A_1 * A_4 - 2 * A_8 * \cos \beta_2 - 2 * A_9 * \sin \beta_2) \\
&\quad = -A_1 * A_4 * A_2 - 2 * A_1 * A_5 \\
&\quad + \sin \beta_2 * (-A_1 * A_3 * A_4 - 2 * A_1 * A_7 + 2 * A_2 * A_9) + \cos \beta_2 \\
&\quad * (-2 * A_1 * A_6 + 2 * A_2 * A_8) + 2 * A_3 * A_8 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + 2 * A_3 \\
&\quad * A_9 * \sin^2 \beta_2
\end{aligned}$$

$$B_1 = A_1 * A_4$$

$$B_2 = 2 * A_8$$

$$B_3 = 2 * A_9$$

$$B_4 = -A_1 * A_4 * A_2 - 2 * A_1 * A_5$$

$$B_5 = -A_1 * A_3 * A_4 - 2 * A_1 * A_7 + 2 * A_2 * A_9$$

$$B_6 = -2 * A_1 * A_6 + 2 * A_2 * A_8$$

$$B_7 = 2 * A_3 * A_8$$

$$B_8 = 2 * A_3 * A_9$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \sqrt{(A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} * (B_1 \\ & - B_2 \cos \beta_2 - B_3 * \sin \beta_2 \\ & = B_4 + B_5 * \sin \beta_2 + B_6 * \cos \beta_2 + B_7 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_8 * \sin^2 \beta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{4} * A_1 * & \left(A_2 + A_3 * \sin \beta_2 + \sqrt{(A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} \right) * A_4 + \frac{m^2}{2} \\ & * \left(A_2 + A_3 * \sin \beta_2 + \sqrt{(A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} \right) \\ & * (A_5 + A_6 * \cos \beta_2 + A_7 * \sin \beta_2) + (A_8 * \cos \beta_2 + A_9 * \sin \beta_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \sqrt{(A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} * (A_1 * A_4 + 2 * (A_5 + A_6 * \cos \beta_2 + A_7 * \sin \beta_2)) \\ & = -A_1 * A_4 * A_2 - 2 * A_1 * A_5 + 2 * A_1 * (A_8 * \cos \beta_2 + A_9 * \sin \beta_2) \\ & - 2 * (A_2 + A_3 * \sin \beta_2) * (A_5 + A_6 * \cos \beta_2 + A_7 * \sin \beta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \sqrt{(A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8} * (A_1 * A_4 + 2 * A_5 + 2 * A_6 * \cos \beta_2 + 2 * A_7 * \sin \beta_2) \\ & = -A_1 * A_4 * A_2 - 2 * A_1 * A_5 + \sin \beta_2 \\ & * (-A_1 * A_3 * A_4 - 2 * A_1 * A_7 + 2 * A_2 * A_9) \\ & + \cos \beta_2 * (-2 * A_1 * A_6 + 2 * A_2 * A_8) + \sin \beta_2 * \cos \beta_2 \\ & * (-2 * A_3 * A_8) + \sin^2 \beta_2 * (-2 * A_3 * A_9) \end{aligned}$$

Ersetzen durch Variablen B_i

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & ((A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8) * (B_1 + B_2 * \cos \beta_2 + B_3 * \sin \beta_2)^2 \\ & = (B_4 + \sin \beta_2 * B_5 + \cos \beta_2 * B_6 + B_7 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_8 \sin^2 \beta_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (A_2^2 + 8 + 2 * A_2 * A_3 * \sin \beta_2 + A_3^2 * \sin^2 \beta_2) \\ & * (B_1^2 + 2 * B_1 * (B_2 * \cos \beta_2 + B_3 * \sin \beta_2) \\ & + (B_2 * \cos \beta_2 + B_3 * \sin \beta_2)^2) \\ & = (B_4 + \sin \beta_2 * B_5 + \cos \beta_2 * B_6)^2 + 2 \\ & * (B_4 + \sin \beta_2 * B_5 + \cos \beta_2 * B_6) \\ & * (B_7 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_8 * \sin^2 \beta_2) \\ & + (B_7 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_8 * \sin^2 \beta_2) \\ & + (B_7 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_8 \sin^2 \beta_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (A_2^2 + 8 + 2 * A_2 * A_3 * \sin \beta_2 + A_3^2 * \sin^2 \beta_2) \\ & * (B_1^2 + 2 * B_1 * (B_2 * \cos \beta_2 + B_3 * \sin \beta_2) + B_2^2 \\ & * \cos^2 \beta_2 + 2 * B_2 * B_3 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_3^2 * \sin^2 \beta_2) \\ & = (B_4^2 + 2 * B_4 * (\sin \beta_2 * B_5 + \cos \beta_2 * B_6) \\ & + \sin^2 \beta_2 * B_5^2 + 2 * B_5 * B_6 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_6^2 * \cos^2 \beta_2) \\ & + \sin \beta_2 * \cos \beta_2 * (2 * B_4 * B_7) + \cos^2 \beta_2 * \sin \beta_2 * (2 * B_6 * B_7) \\ & + \sin^2 \beta_2 * (2 * B_4 * B_8) + \cos \beta_2 * \sin^2 \beta_2 \\ & * (2 * B_6 * B_8 + 2 * B_5 * B_7) + \sin^3 \beta_2 * (B_5 * B_8) + \cos^2 \beta_2 * \sin^2 \beta_2 \\ & * B_7 + 2 * B_7 * B_8 * \cos \beta_2 * \sin^3 \beta_2 + B_8^2 * \sin^4 \beta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ((A_2^2 + 8 + 2 * A_2 * A_3 * \sin \beta_2) + \sin^2 \beta_2 * A_3^2) \\
&\quad * (B_1^2 + 2 * B_1 * B_2 * \cos \beta_2 + 2 * B_1 * B_3 \\
&\quad * \sin \beta_2 + \cos^2 \beta_2 * B_3^2 + \cos^2 \beta_2 * B_2^2 + \cos \beta_2 * \sin^2 \beta_2 * 2 * B_2 * B_3 \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 * B_3^2) \\
&= B_4^2 + \sin \beta_2 * 2 * B_4 * B_5 + \cos \beta_2 * 2 * B_4 * B_6 + \sin^2 \beta_2 * B_5^2 \\
&+ \sin \beta_2 * \cos \beta_2 * 2 * B_5 * B_6 + \cos^2 \beta_2 * B_6^2 \\
&+ \sin^3 \beta_2 * 2 * B_5 * B_8 + \cos^2 \beta_2 * \sin^2 \beta_2 * B_7^2 + \sin^3 \beta_2 * \cos \beta_2 * 2 \\
&\quad * B_7 * B_8 + B_8^2 * \sin^4 \beta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{c_{00}} = (A_2^2 + 8 + 2 * A_2 * A_3 * \sin \beta_2) \\
&\Leftrightarrow (\overline{c_{00}} + 2 * A_2 * A_3 * \sin^3 \beta_2) \\
&\quad * (B_1^2 + * \cos \beta_2 * 2 * B_1 * B_2 + \sin \beta_2 * 2 * B_1 * B_3 + B_2^2 + \sin \beta_2 \\
&\quad * \cos \beta_2 * 2 * B_2 * B_3 + \sin^2 \beta_2 * (B_3^2 - B_2^2)) \\
&= B_4^2 + B_6^2 + \sin \beta_2 \\
&\quad * (2 * B_4 * B_5 + 2 * B_6 * B_7 + \cos \beta_2 * 2 * B_4 * B_6 + \sin^2 \beta_2 (B_5^2 - B_6^2 \\
&\quad + 2 * B_4 * B_8 + B_7^2) + \sin \beta_2 * \cos \beta_2 * (2 * B_5 * B_6 + 2 * B_4 * B_6) \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 (-2 * B_6 * B_7 + 2 * B_5 * B_8) \\
&\quad + \cos \beta_2 * \sin^2 \beta_2 (2 * B_6 * B_8 + 2 * B_5 * B_7) + \sin^3 \beta_2 * B_5 * B_8 \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 * \cos \beta_2 * 2 * B_5 * B_6 + \sin^4 \beta_2 (B_8^2 - B_7^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&((A_2 + A_3 * \sin \beta_2)^2 + 8) \\
&\quad * (B_1^2 - 2 * (B_2 * \cos \beta_2 + B_3 * \sin \beta_2) + (B_2 * \cos \beta_2 + B_3 * \sin \beta_2)^2) \\
&= (B_4 + B_5 * \sin \beta_2 + B_6 * \cos \beta_2)^2 + 2 \\
&\quad * (B_4 + B_5 * \sin \beta_2 + B_6 * \cos \beta_2) \\
&\quad * (B_7 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_8 * \sin^2 \beta_2) \\
&\quad + (B_7 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_8 * \sin^2 \beta_2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (A_2^2 + 2 * A_2 * A_3 * \sin \beta_2 + A_3^2 * \sin^2 \beta_2 * 8) \\
&\quad * (B_1^2 - 2 * B_1 * B_2 \\
&\quad * \cos \beta_2 - 2 * B_1 \\
&\quad * B_3 \sin \beta_2 + B_2^2 \\
&\quad * \cos^2 \beta_2 + 2 * B_2 * B_3 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_2^2 * \sin^2 \beta_2) \\
&= B_4^2 + 2 * B_4 * (B_5 * \sin \beta_2 + B_6 * \cos \beta_2) + B_5^2 * \sin^2 \beta_2 + B_5^2 \\
&\quad * \sin^2 \beta_2 + 2 * B_5 * B_6 \\
&\quad * \sin \beta_2 \\
&\quad * \cos \beta_2 + B_6^2 * \cos^2 \beta_2 + 2 * B_4 * B_7 \\
&\quad * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + 2 * B_4 * B_8 * \sin^2 \beta_2 + 2 * B_5 * B_7 * \sin^2 \beta_2 * \cos \beta_2 \\
&\quad + 2 * B_5 * B_8 * \sin^2 \beta_2 + 2 * B_5 * B_8 * \sin^3 \beta_2 + 2 * B_6 * B_7 * \sin \beta_2 \\
&\quad * \cos^2 \beta_2 + 2 * B_6 * B_8 * \sin^2 \beta_2 * \cos \beta_2 + B_7^2 * \sin^2 \beta_2 * \cos^2 \beta_2 + 2 \\
&\quad * B_7 * B_8 * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + B_8^2 * \sin^4 \beta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (A_2^2 + 8 * B_1^2 + \sin \beta_2 * (2 * A_2 * A_3 * B_1^2 - 2 * (A_2^2 + 8) * B_1 * B_2) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 (A_3^2 * B_1^2 + 4 * A_2 * A_3 * B_1 * B_2 * (A_2^2 + 8) + B_2^2) \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 * (2 * A_2 * A_3 * B_2^2 - 2 * A_3^2 * B_1 * B_3) + \cos \beta_2 \\
&\quad * (-2 * (A_2^2 + 8) * B_1 * B_2) + \cos^2 \beta_2 * ((A_2^2 + 8) * B_2^2) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * \cos^2 \beta_2 * (-4 * A_2 * A_3 * B_1 * B_2 + 2 * (A_2^2 + 8) * B_2 * B_3) \\
&\quad + \sin \beta_2 \\
&\quad * \cos \beta_2 * (2 * A_2 * A_3 * B_2^2) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * \cos \beta_2 * (2 * A_2 * A_3 * B_2 * B_3 - 2 * A_3^2 * B_1 * B_2) \\
&\quad + \sin^4 \beta_2 * A_3^2 * B_2^2 + \sin \beta_2 * \cos \beta_2 * (A_3^2 * B_2^2) \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 * \cos \beta_2 * (2 * A_3^2 * B_2 * B_3) \\
&= B_4^2 + \sin \beta_2 * (2 * B_4 * B_5) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 * (B_5^2 + 2 * B_4 * B_8) + \sin^3 \beta_2 * (2 * B_5 * B_8 + 2 * B_7 * B_8) \\
&\quad + \sin^4 \beta_2 * B_8^2 + \cos \beta_2 * (2 * B_4 * B_6) + \cos^2 \beta_2 * (B_6) + \sin \beta_2 * \cos \beta_2 \\
&\quad * (2 * B_5 * B_6 + 2 * B_4 * B_7) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * \cos \beta_2 * (2 * B_5 * B_7 + 2 * B_6 * B_8) \\
&\quad + \sin \beta_2 * \cos^2 \beta_2 * (2 * B_6 * B_7) + \sin^2 \beta_2 * \cos^2 \beta_2 * (B_7^2) \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 * \cos \beta_2 * (2 * B_7 * B_8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (A_2^2 + 8) * B_1^2 - B_4^2 + \sin \beta_2 \\
&\quad * (2 * A_2 * A_3 * B_1^2 - 2 * (A_2^2 + 8) * B_1 * B_2 - 2 * B_4 * B_5) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 (A_3^2 * B_1^2 - 4 * A_2 * A_3 * B_1 * B_2 + (A_2^2 + 8) * B_2^2 - B_5^2 - 2 \\
&\quad * B_4 * B_8) + \sin^3 \beta_2 \\
&\quad * (2 * A_2 * A_3 * B_2^2 - 2 * A_3^2 * B_1 * B_3 - 2 * B_5 * B_8 - 2 * B_7 * B_8) \\
&\quad + \sin^4 \beta_2 * (A_3^2 * B_2^2 - B_8^2) + \cos \beta_2 \\
&\quad * (-2 * (A_2^2 + 8) * B_1 * B_2 - 2 * B_4 * B_6) + \cos^2 \beta_2 \\
&\quad * ((A_2^2 + 8) * B_2^2 - B_6^2) + \sin \beta_2 * \cos \beta_2 \\
&\quad * (-4 * A_2 * A_3 * B_1 * B_2 + 2 * (A_2^2 + 8) * B_2 * B_3 - 2 * B_5 * B_6 - 2 \\
&\quad * B_4 * B_7) + \sin \beta_2 * \cos^2 \beta_2 * (2 * A_2 * A_3 * B_2^2 - 2 * B_6 * B_7) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 * \cos \beta_2 * (2 * A_2 * A_3 * B_2 * B_3 - 2 * B_5 * B_7 - 2 * B_6 * B_8) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 * \cos^2 \beta_2 * (A_3^2 * B_2^2 - B_7^2) + \sin^3 \beta_2 * \cos \beta_2 \\
&\quad * (2 * A_3^2 * B_2 * B_3 - 2 * B_7 * B_8) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_{00} + C_{10} * \sin \beta_2 + C_{20} * \sin^2 \beta_2 + C_{30} * \sin^3 \beta_2 + C_{40} * \sin^4 \beta_2 + C_{01} * \cos \beta_2 \\
&\quad + C_{02} * \cos^2 \beta_2 + C_{11} * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + C_{12} * \sin \beta_2 * \cos^2 \beta_2 + C_{21} \\
&\quad * \sin \beta_2 * \cos \beta_2 + C_{22} * \sin^2 \beta_2 * \cos^2 \beta_2 + C_{31} * \sin^3 \beta_2 * \cos \beta_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (C_{00} + 2 * A_2 * A_3 * \sin \beta_2 + \sin^2 \beta_2 * A_3^2) \\
&\quad * (B_1^2 + B_2^2 + \cos \beta_2 * 2 * B_1 * B_2 + \sin \beta_2 * 2 * B_1 * B_3 + \cos \beta_2 \\
&\quad * \sin \beta_2 * 2 * B_2 * B_3 + \sin^2 \beta_2 * (B_3^2 - B_2^2)) \\
&= B_4^2 + B_6^2 + \sin \beta_2 * (2 * B_4 * B_5 + 2 * B_6 * B_7) + \cos \beta_2 * 2 * B_4 \\
&\quad * B_6 \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 * (B_5^2 - B_6^2 + 2 * B_4 * B_8 - B_7^2) + \cos \beta_2 * \sin \beta_2 \\
&\quad * (2 * B_5 * B_6 + 2 * B_4 * B_7) + \sin^3 \beta_2 * (2 * B_6 * B_7 + 2 * B_5 * B_8) \\
&\quad + \cos \beta_2 * \sin^2 \beta_2 * (2 * B_6 * B_3 + 2 * B_5 * B_7) + \sin^3 \beta_2 * 2 * B_5 * B_8 \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 * \cos \beta_2 * 2 * B_7 * B_8 + \sin^4 \beta_2 * (B_8^2 - B_7^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_{00} * (B_1^2 + B_2^2) - (B_4^2 + B_6^2) + \cos \beta_2 * (C_{00} * 2 * B_1 * B_2 - 2 * B_4 * B_6) + \sin \beta_2 \\
&\quad * (C_{00} * 2 * B_1 * B_3 - 2 * B_4 * B_5 + 2 * A_2 * A_3 * (B_1^2 + B_2^2) - 2 * B_6 \\
&\quad * B_7) \\
&\quad + \cos \beta_2 \\
&\quad * \sin \beta_2 \\
&\quad * (C_{00} * 2 * B_2 * B_3 - 2 * B_5 * B_6 + 2 * A_2 * A_3 * 2 * B_1 * B_2 - 4 * B_4 \\
&\quad * B_7) + \sin^2 \beta_2 * (C_{00} * (B_2^2 + B_3^2) - B_5^2 + B_6^2 - 2 * B_4 * B_8 + 2 * A_2 \\
&\quad * A_3 * 2 * B_1 * B_3 + B_7^2) + \sin^2 \beta_2 * (A_3^2 * (B_1^2 + B_2^2)) + \cos \beta_2 \\
&\quad * \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * (A_3^2 * 2 * B_1 * B_2 + 2 * A_2 * A_3 * 2 * B_2 * B_3 - 2 * B_6 * B_8 - 2 * B_5 \\
&\quad * B_7) + \sin^4 \beta_2 * (A_3^2 * (B_3^2 - B_2^2) - B_8^2 + B_7^2) \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 * (2 * B_6 * B_7 - 2 * B_1 * B_3 * A_3^2 + 2 * A_2 * A_3 * (B_3^2 - B_2^2)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_{00} * (B_1^2 + B_2^2) - (B_4^2 + B_6^2) + \cos \beta_2 * (C_{00} * 2 * B_1 * B_2 - 2 * B_4 * B_6) + \sin \beta_2 \\
&\quad * (C_{00} * 2 * B_1 * B_3 - 2 * B_4 * B_5 + 2 * A_2 * A_3 * (B_1^2 + B_2^2) - 2 * B_6 \\
&\quad * B_7) + \cos \beta_2 * \sin \beta_2 \\
&\quad * (C_{00} * 2 * B_2 * B_3 - 2 * B_5 * B_6 + 4 * A_2 * A_3 * B_1 * B_2 - 2 * B_4 \\
&\quad * B_7) \\
&\quad + \sin^2 \beta_2 * (C_{00} * (B_3^2 - B_2^2) - B_5^2 + B_6^2 + 4 * A_2 * A_3 * B_1 * B_3 - 2 \\
&\quad * B_4 * B_8 - B_7^2 + A_3^2 * (B_1^2 + B_2^2)) + \cos \beta_2 * \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * (A_3^2 * 2 * B_1 * B_2 + 4 * A_2 * A_3 * B_2 * B_3 - 2 * B_6 * B_8 - 2 * B_5 * B_7) \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 * (2 * B_6 * B_7 + 2 * B_1 * B_3 * A_3^2 + 2 * A_2 * A_3 * (B_3^2 - B_2^2) \\
&\quad - 2 * B_5 * B_8) + \sin^4 \beta_2 * (A_3^2 * (B_3^2 - B_2^2) - B_8^2 + B_7^2) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_{00} + \cos \beta_2 * C_{10} + \sin \beta_2 * C_{01} + \cos \beta_2 * \sin \beta_2 * C_{11} + \sin^2 \beta_2 * C_{02} \\
&\quad + \cos \beta_2 \sin^2 \beta_2 * C_{12} + \sin^3 \beta_2 * C_{03} + \sin^4 \beta_2 * C_{04} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos \beta_2 * (C_{10} + \sin \beta_2 * C_{11} + \sin^2 \beta_2 * C_{12}) = -C_{00} - \sin \beta_2 * C_{01} - \sin^2 \beta_2 * C_{02} \\
&\quad + \sin^3 \beta_2 * C_{03} + \sin^4 \beta_2 * C_{04}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos^2 \beta_2 * (C_{10}^2 + 2 * C_{10} * (\sin \beta_2 * C_{11} + \sin^2 \beta_2 * C_{12}) + \sin^2 \beta_2 * C_{11}^2 + 2 \\
&\quad * \cos^3 \beta_2 * C_{11} * C_{12} + \sin^4 \beta_2 * C_{12}^2) \\
&\quad = (C_{00} + \sin \beta_2 * C_{01})^2 + 2 * (C_{00} + \sin \beta_2 * C_{01}) * \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * (C_{02} + \sin \beta_2 * C_{03} + \sin^2 \beta_2 * C_{04}) \\
&\quad + \sin^4 \beta_2 * (C_{02} + \sin \beta_2 * C_{03} + \sin^2 \beta_2 * C_{04})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (1 - \sin^2 \beta_2) \\
&\quad * (C_{10}^2 + \sin \beta_2 * C_{10} * C_{11} + \sin^2 \beta_2 * (2 * C_{10} * C_{12} + C_{11}^2) + \sin^3 \beta_2 \\
&\quad * 2 * C_{11} * C_{12} + \sin^4 \beta_2 * C_{12}^2) \\
&\quad = C_{00}^2 + \sin \beta_2 * 2 * C_{00} * C_{01} + \sin^2 \beta_2 * C_{01}^2 + 2 \\
&\quad * \sin^2 \beta_2 * (C_{00} + \sin \beta_2 * C_{01}) * (C_{02} + \sin \beta_2 * C_{03} + \sin^2 \beta_2 * C_{04}) \\
&\quad + \sin^4 \beta_2 * (C_{02}^2 + 2 * C_{02} * (\sin \beta_2 * C_{03} + \sin^2 \beta_2 * C_{04}) + \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * C_{03}^2 + 2 * \sin \beta_2 * C_{03} * C_{04} + \sin^2 \beta_2 * C_{04}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_{10}^2 + \sin \beta_2 * 2 * C_{10} * C_{11} + \sin^2 \beta_2 * (2 * C_{10} * C_{12} + C_{11}^2 - C_{10}^2) + \sin^3 \beta_2 \\
&\quad * (2 * C_{11} * C_{12} - 2 * C_{10} * C_{11}) + \sin^4 \beta_2 \\
&\quad * (C_{12}^2 - 2 * C_{10} * C_{12} - C_{11}^2) + \sin^5 \beta_2 * (-2 * C_{11} * C_{12}) + \sin^6 \beta_2 \\
&\quad * (-C_{12}^2) \\
&= C_{00}^2 + \sin \beta_2 * 2 * C_{00} * C_{01} * \sin^2 \beta_2 * C_{01}^2 + 2 * \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * (C_{00} * C_{02} + \sin \beta_2 (C_{00} * C_{03} + C_{01} * C_{02})) + \sin^4 \beta_2 \\
&\quad * (C_{02}^2 + \sin \beta_2 * 2 * C_{02} * C_{03} + \sin^2 \beta_2 * (2 * C_{02} * C_{04} + C_{03}^2)) + \sin^3 \beta_2 \\
&\quad * 2 * C_{03} * C_{04} + \sin^4 \beta_2 * C_{04}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_{10}^2 + C_{00}^2 + \sin \beta_2 * (2 * C_{10} * C_{11} - 2 * C_{00} * C_{01}) + \sin^2 \beta_2 \\
&\quad * (2 * C_{10} * C_{12} + C_{11}^2 - C_{01}^2 - 2 * C_{00} * C_{02}) + \sin^3 \beta_2 \\
&\quad * (2 * C_{11} * C_{12} - 2 * C_{10} * C_{11} - 2 * C_{00} * C_{03} - 2 * C_{01} * C_{02}) \\
&\quad + \sin^4 \beta_2 \\
&\quad * (C_{12}^2 - 2 * C_{10} * C_{12} - C_{11}^2 - 2 * C_{01} * C_{03} - 2 * C_{01} * C_{03} - 2 * C_{01} \\
&\quad * C_{03} - 2 * C_{00} * C_{04} - C_{02}^3) + \sin^5 \beta_2 \\
&\quad * (-2 * C_{11} * C_{12} - 2 * C_{01} * C_{04} - 2 * C_{02} * C_{03}) + \sin^6 \beta_2 \\
&\quad * (-C_{12}^2 - 2 * C_{02} * C_{04} - C_{03}^2) + \sin^7 \beta_2 * (-2 * C_{03} * C_{04}) + \sin^8 \beta_2 \\
&\quad * (-C_{04}^2) = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow D_0 + \sin \beta_2$$

$$* D_1 + \sin^2 \beta_2 D_2 + \sin^3 \beta_2 D_3 + \sin^4 \beta_2 D_4 + \sin^5 \beta_2 D_5 + \sin^6 \beta_2 D_6 + \sin^7 \beta_2 D_7 + \sin^8 \beta_2 D_8 = 0$$

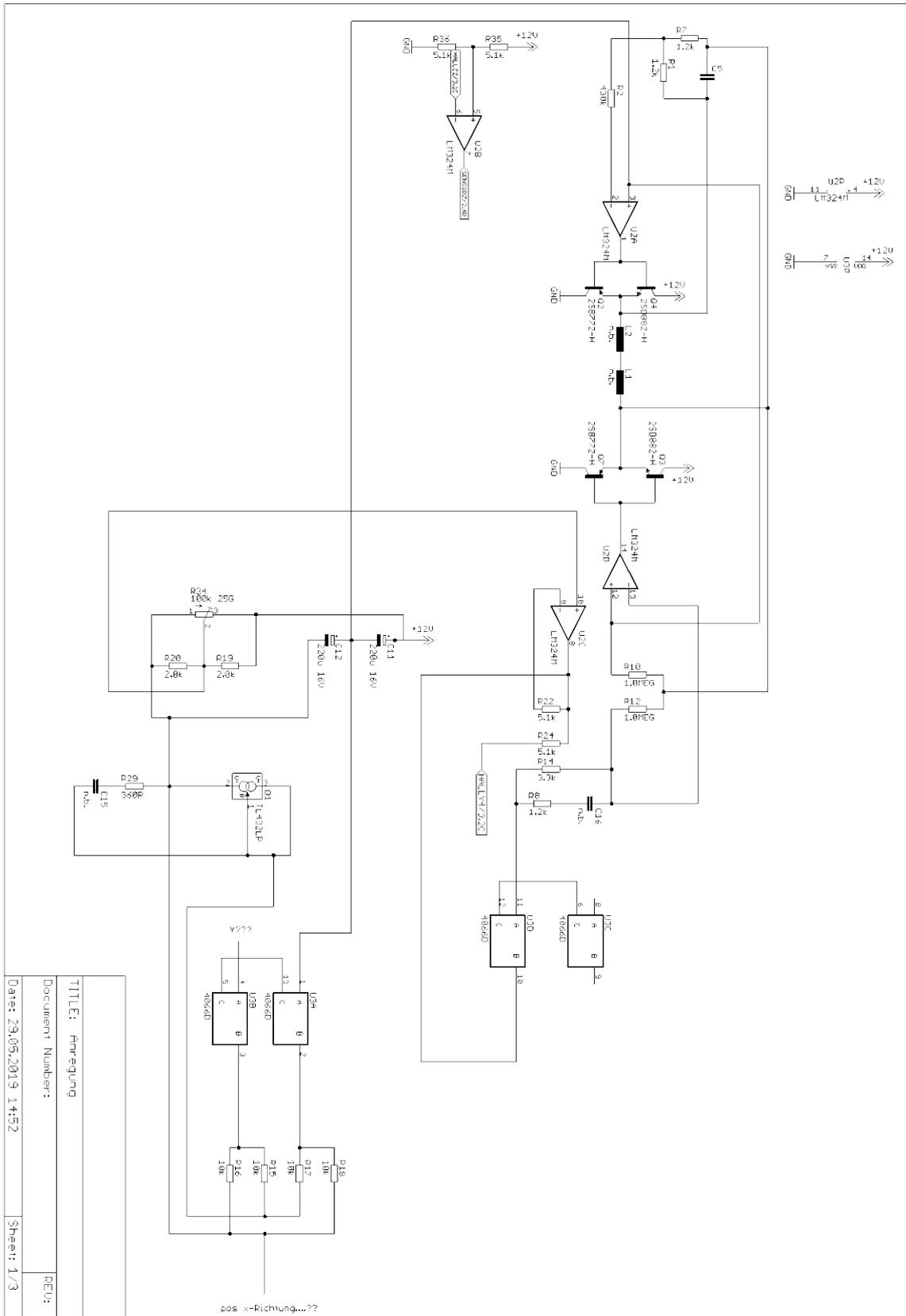
Wichtig:

$$\begin{aligned}
D_8 = C_{04}^2 &= (A_3^2 * (B_3^2 - B_2^2) - B_8^2 + B_7^2)^2 \\
&= (A_3^2 * ((2 * A_7)^2 - (2 * A_6)^2) - (2 * A_3 * A_7)^2 + (2 * A_3 * A_6)^2)^2 \\
&= (4 * A_3 * (A_7^2 - A_6^2 - A_7^2 + A_6^2))^2 = 0 !!
\end{aligned}$$

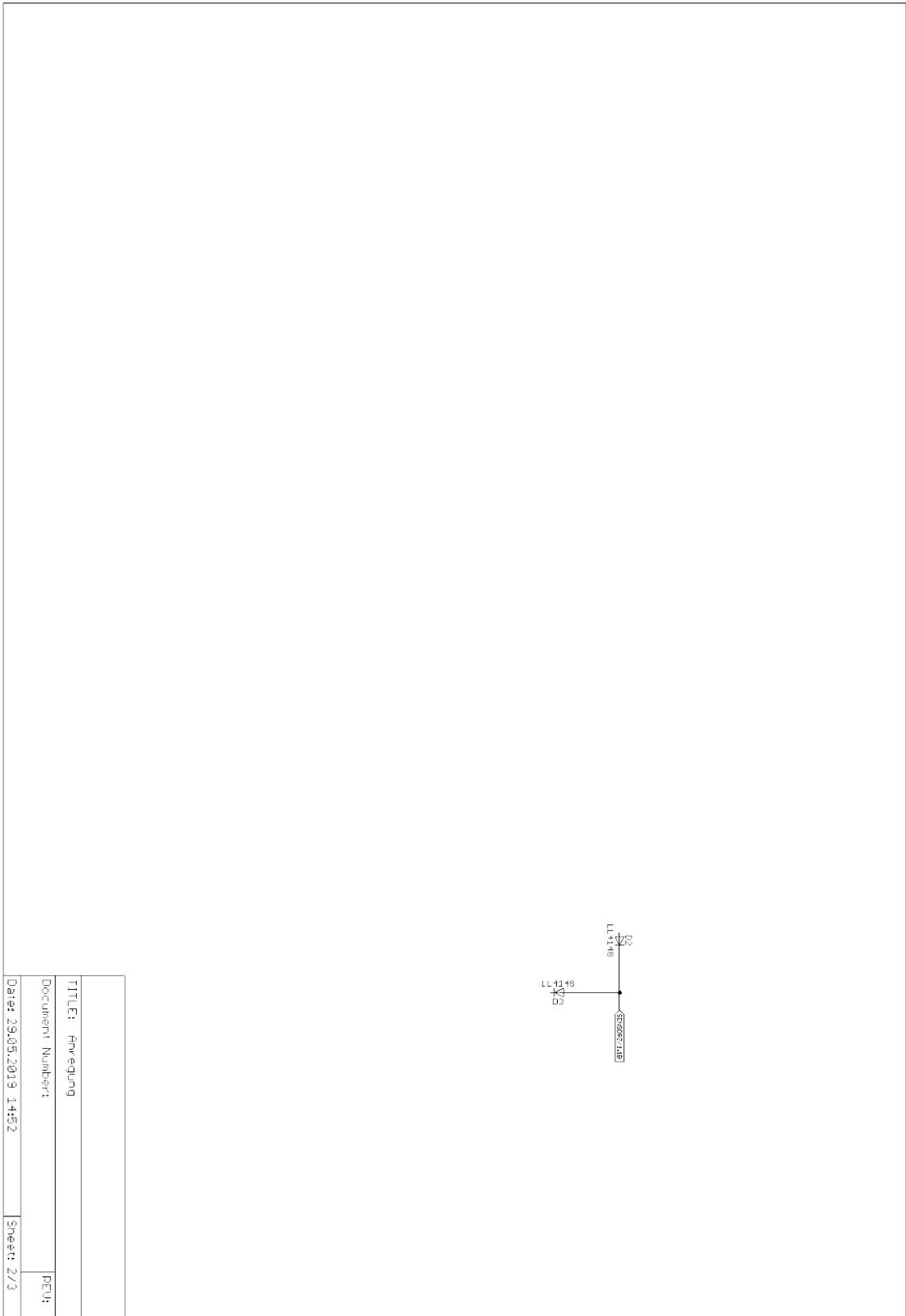
$$\begin{aligned}
D_7 &= -2 * C_{03} * C_{04} \\
&= -2 \\
&\quad * (2 * B_6 * B_7 - 2 * B_5 * B_8 + 2 * B_1 * B_3 * A_3^2 + 2 * A_2 \\
&\quad * A_3 (B_3^2 - B_2^2)) * (...) = 0 !!
\end{aligned}$$

5 Schaltpläne

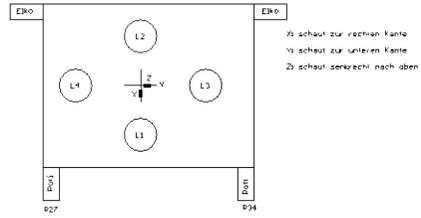
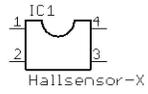
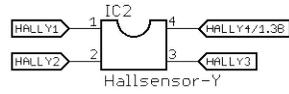
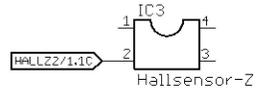
5.1 Schaltplan des bestehenden Systems



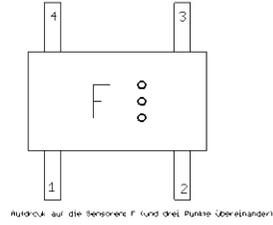
| |
|------------------------|
| TITLE: Anregung |
| Document Number: |
| REV: |
| Date: 29.05.2019 14:52 |
| Sheet: 1/3 |



| | |
|------------------------|------------|
| TITLE: Anregung | |
| Document Number: | |
| Date: 29.05.2019 14:52 | Sheet: 2/3 |



Ansicht der Sensoren von oben auf die Platine, die Potis schauen nach unten und die Elkos an der oberen Kante nach aussen



| | |
|------------------------|------------|
| TITLE: Anregung | |
| Document Number: | REV: |
| Date: 29.05.2019 14:52 | Sheet: 3/3 |

5.2 Schaltplan Spulenbestromung

12.2019 18:14 f=1.02 M:\Elektronik\Eagle-projekte\Eagle-BauerMatthias\Amplifier-UI.sch (Sheet: 1/1)

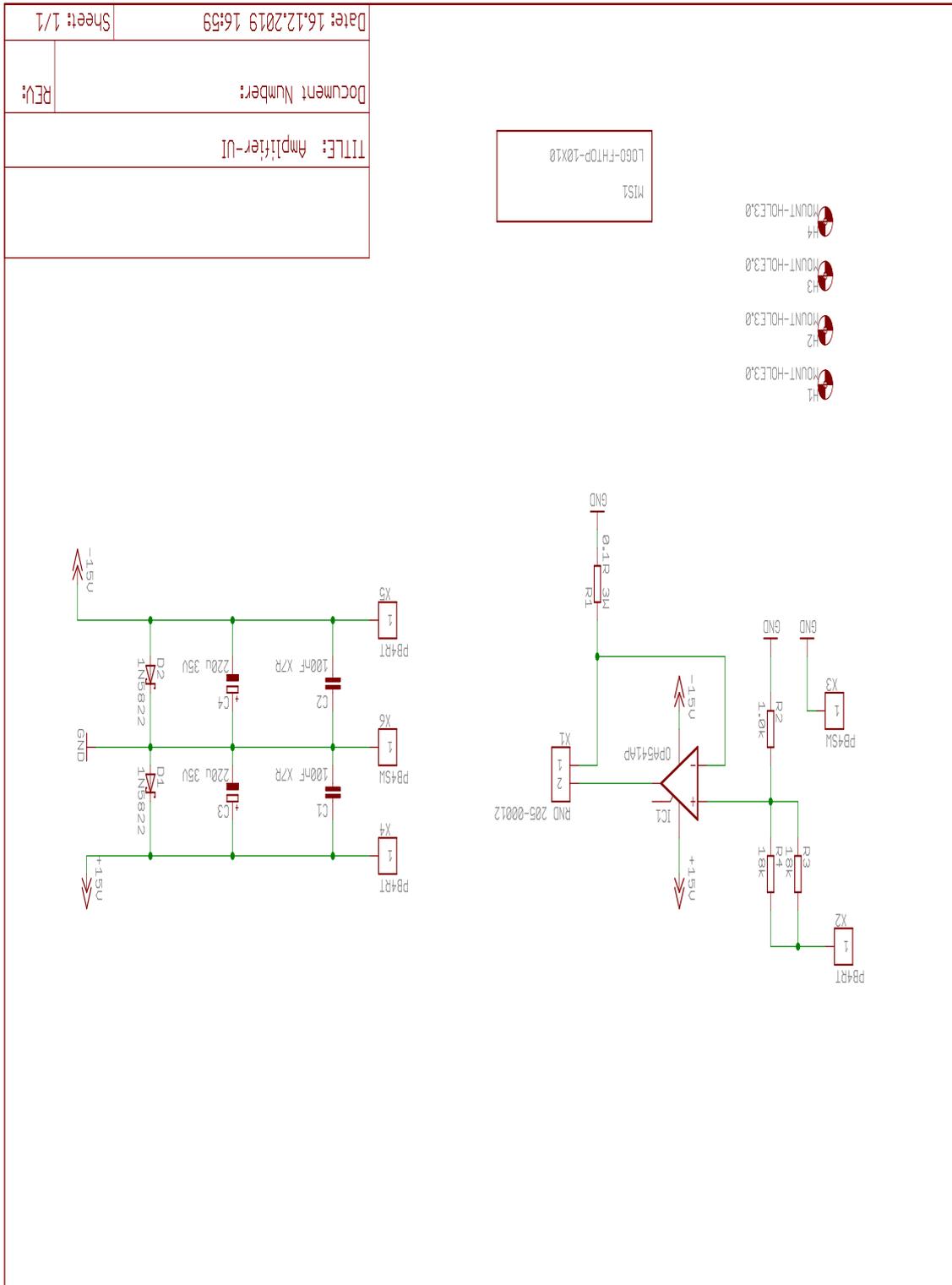


Abbildung 76 Schaltplan zur definierten Bestromung der Spule im inversen Magnet-schwebeversuch

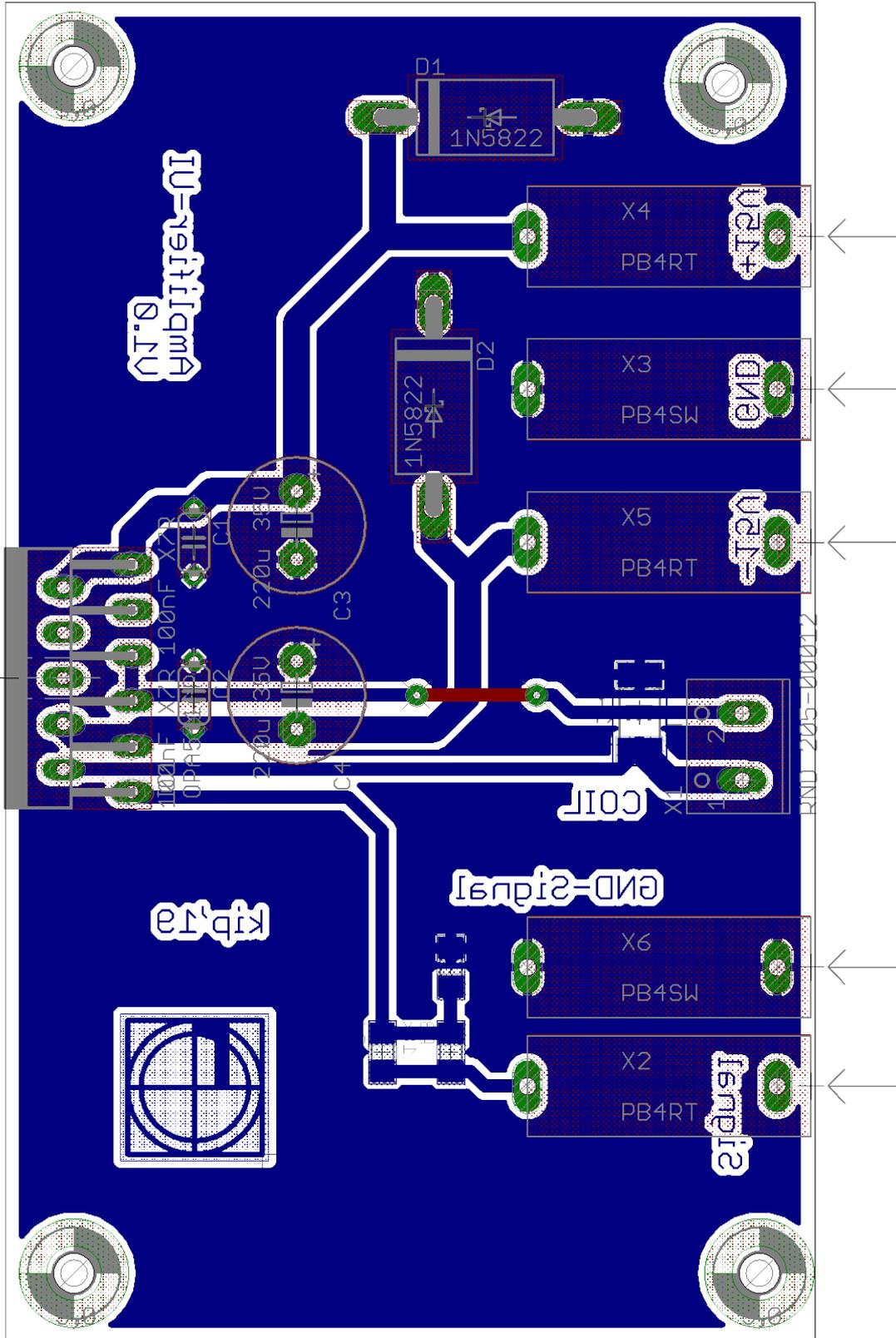


Abbildung 77 Platinenlayout zur Bestromung der Spule

6.2 Hallsensor Honeywell SS490

Installation Instructions for the SS490 Series Miniature Ratiometric Linear Hall-Effect Sensor ICs

Honeywell

PK 88840

Issue 6

SOLDERING INSTRUCTIONS

NOTICE

Do not wave solder surface mount sensor ICs (catalog listings with suffixes -S or -SP). Wave soldering may negatively affect sensor performance and reliability, and will void Honeywell's warranty.

Surface mount (catalog listings with suffixes -S or -SP): Use infrared reflow process with active flux, lead-free solder. Do not exceed peak temperature of 245 °C [473 °F] for a maximum of 10 seconds.

Through-hole leads: Wave solder at 250 °C to 260 °C [482 °F to 500 °F] for a maximum of 3 seconds. Burrs are allowed only if full length of leads will pass through hole.

CLEANING INSTRUCTIONS

CAUTION

PRODUCT DAMAGE

Use agitated rinse, not pressure wash, in order to avoid forcing contaminants into the sensor package.

Failure to comply with these instructions may result in product damage.

Table 1. Absolute Maximum Ratings

| Characteristic | Parameter |
|-----------------------|--|
| Supply voltage (Vs) | -0.5 Vdc to 11 Vdc |
| Output current | 10 mA |
| Operating temperature | -40 °C to 150 °C [-40 °F to 302 °C] |
| Storage temperature | -55 °C to 165 °C [-67 °F to 329 °C] |
| Magnetic flux | no limit - circuit cannot be damaged by magnetic overdrive |

NOTICE

Absolute maximum ratings are the extreme limits that the device will withstand without damage to the device. However, the electrical and mechanical characteristics are not guaranteed as the maximum limits (above recommended operating conditions) are approached, nor will the device necessarily operate at absolute maximum ratings.



Table 2. Specifications (Vs = 5.0 Vdc, Ta = -40 °C to 125 °C [-40 °F to 257 °F] unless otherwise noted.)

| Characteristic | Condition | Catalog Listing Prefix | | | | | | | Unit |
|---|--|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---------|
| | | SS494A | SS495A1 | SS495A2 | SS495B | SS496A | SS496A1 | SS496B | |
| Supply voltage | — | 4.5 to 10.5 | | | | | | | Vdc |
| Supply current: typical maximum | at 25 °C | 7.0 8.7 | | | | | | | mA |
| Output type (sink or source) | — | ratiometric | | | | | | | — |
| Output current: typical (sink or source) minimum (source) minimum (sink) minimum (sink) | Vs > 4.5 V Vs > 4.5 V Vs > 4.5 V Vs > 5.0 V | 1.5 1.0 0.6 1.0 | | | | | | | mA |
| Operating temperature | — | -40 to 150 [-40 to 302] | | | | | | | °C [°F] |
| Magnetic range: typical minimum | — | ±670 ±600 | ±670 ±600 | ±670 ±600 | ±670 ±600 | ±840 ±750 | ±840 ±750 | ±840 ±750 | Gauss |
| Output voltage span: typical maximum | — | 0.2 to (Vs-0.2) 0.4 to (Vs-0.4) | | | | | | | V |
| Null | output at 0 Gauss | 2.50 ±0.075 | 2.50 ±0.075 | 2.50 ±0.100 | 2.50 ±0.150 | 2.50 ±0.075 | 2.50 ±0.075 | 2.50 ±0.150 | V |
| Sensitivity | — | 3.125 ±0.125 | 3.125 ±0.094 | 3.125 ±0.156 | 3.125 ±0.250 | 2.50 ±0.100 | 2.50 ±0.075 | 2.50 ±0.200 | mV/G |
| Linearity: typical maximum | — | -1.0 -1.5 | | | | | | | % Span |
| Temperature error: Null drift Sensitivity drift | — ≥25 °C <25 °C | ±0.06 -0.01, +0.05 -0.0, +0.06 | ±0.04 -0.02, +0.06 -0.0, +0.06 | ±0.07 -0.02, +0.06 -0.01, +0.07 | ±0.08 -0.01, +0.05 -0.02, +0.06 | ±0.048 -0.01, +0.05 -0.0, +0.06 | ±0.03 -0.01, +0.05 -0.0, +0.06 | ±0.06 -0.02, +0.06 -0.02, +0.06 | %°C |

Abbildung 79 Datenblatt Hallsensor (1)

SS490 Series Miniature Ratiometric Linear Hall-Effect Sensor ICs

ISSUE 6
PK 88840

Figure 1. Block/Electrical Diagram

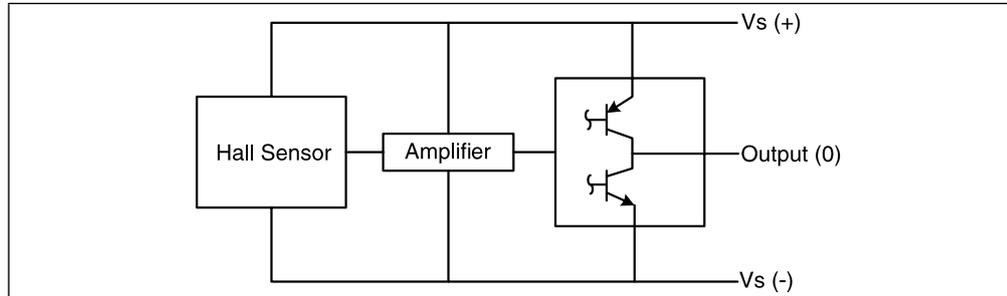


Figure 2. Typical Output vs Gauss ($V_s = 5.0 \text{ Vdc}$)

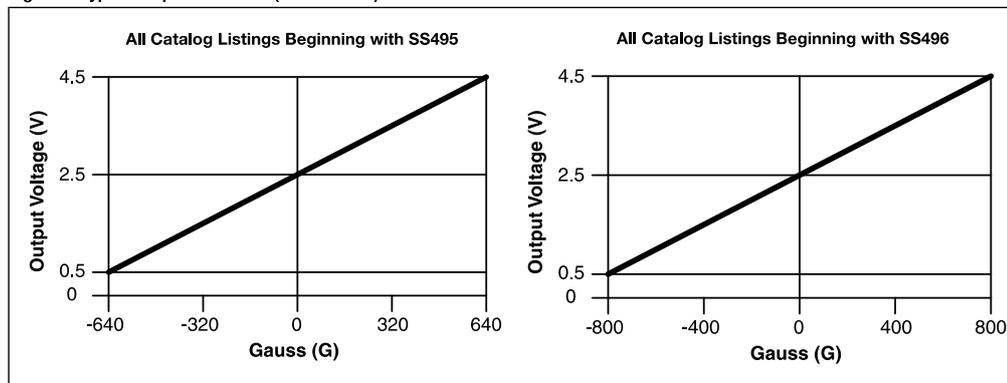


Figure 3. Maximum Allowable Ambient Temperature

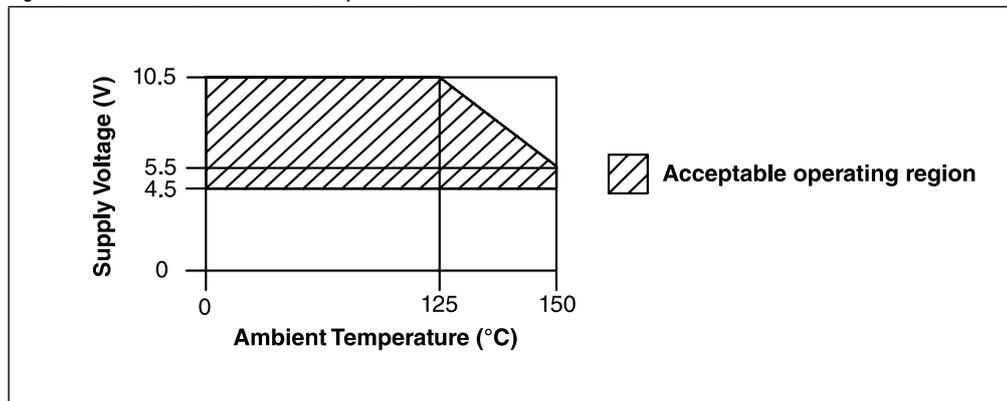


Abbildung 80 Datenblatt Hallsensor (2)

SS490 Series Miniature Ratiometric Linear Hall-Effect Sensor ICs

ISSUE 6
PK 88840

Table 3. Suffix Nomenclature for the SS4 Package:

| Suffix | Description | Suffix | Description |
|--------|--|--------|---|
| -Blank | 14,99 mm [0.590 in] straight standard leads, bulk pack | -S | 3,30 [0.130 in] surface mount, bulk pack |
| -T3 | 14,99 mm [0.590 in] straight standard leads, ammo pack tape in box | -SP | 3,30 [0.130 in] surface mount, pocket tape and reel |
| -F | 14,99 mm [0.590 in] formed leads, bulk pack | -L | 18,67 mm [0.735 in] straight long leads, bulk pack |
| -T2 | 14,99 mm [0.590 in] formed leads, ammo pack tape in box | | |

Figure 4. Dimensional Drawings for Catalog Listings with Suffixes -Blank and -T3 (For Reference Only: mm/[in].)

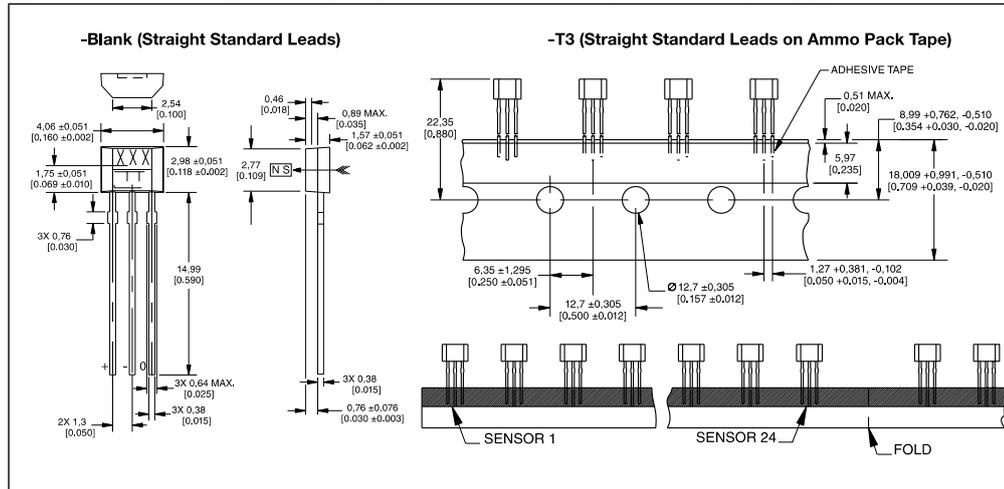


Figure 5. Dimensional Drawings for Catalog Listings with Suffixes -F and -T2 (For Reference Only: mm/[in].)

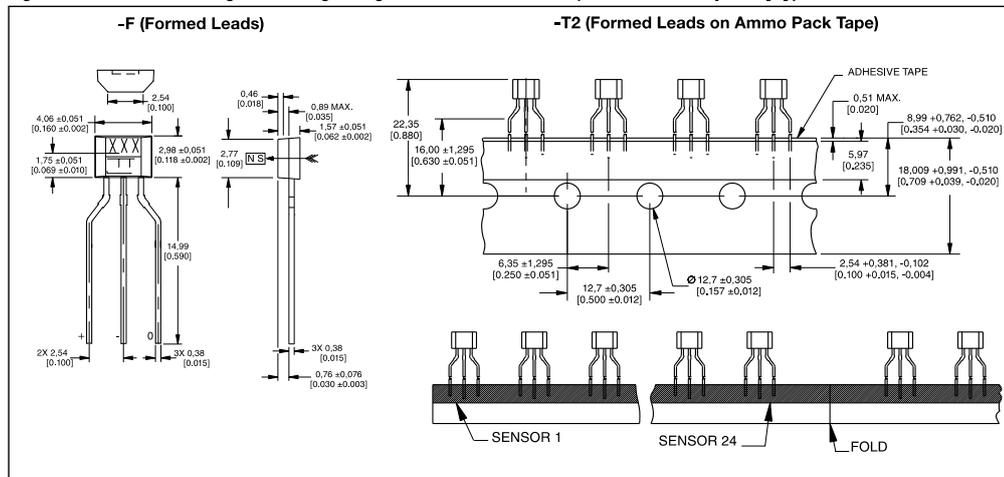


Abbildung 81 Datenblatt Hallsensor (3)

SS490 Series Miniature Ratiometric Linear Hall-Effect Sensor ICs

ISSUE 6
PK 88840

 **WARNING**

PERSONAL INJURY

DO NOT USE these products as safety or emergency stop devices or in any other application where failure of the product could result in personal injury.

Failure to comply with these instructions could result in death or serious injury.

WARRANTY

Honeywell warrants goods of its manufacture as being free of defective materials and faulty workmanship. Honeywell's standard product warranty applies unless agreed to otherwise by Honeywell in writing; please refer to your order acknowledgement or consult your local sales office for specific warranty details. If warranted goods are returned to Honeywell during the period of coverage, Honeywell will repair or replace, at its option, without charge those items it finds defective. **The foregoing is buyer's sole remedy and is in lieu of all warranties, expressed or implied, including those of merchantability and fitness for a particular purpose. In no event shall Honeywell be liable for consequential, special, or indirect damages.**

While we provide application assistance personally, through our literature and the Honeywell web site, it is up to the customer to determine the suitability of the product in the application.

Specifications may change without notice. The information we supply is believed to be accurate and reliable as of this printing. However, we assume no responsibility for its use.

SALES AND SERVICE

Honeywell serves its customers through a worldwide network of sales offices, representatives and distributors. For application assistance, current specifications, pricing or name of the nearest Authorized Distributor, contact your local sales office or:

E-mail: info.sc@honeywell.com

Internet: honeywell.com

Phone and Fax:

| | |
|---------------|-------------------------|
| Asia Pacific | +65 6355-2828 |
| | +65 6445-3033 Fax |
| Europe | +44 (0) 1698 481481 |
| | +44 (0) 1698 481676 Fax |
| Latin America | +1-305-805-8188 |
| | +1-305-883-8257 Fax |
| USA/Canada | +1-800-537-6945 |
| | +1-815-235-6847 |
| | +1-815-235-6545 Fax |

Sensing and Control
Honeywell
1985 Douglas Drive North
Golden Valley, MN 55422
honeywell.com

PK 88840-6-EN
February 2014
© 2014 Honeywell International Inc. All rights reserved.

Honeywell

Abbildung 82 Datenblatt Hallsensor (4)

7 Literaturverzeichnis

- [1] H. Altenbach, *Kontinuumsmechanik*, Berlin Heidelberg: Springer Vieweg, 2018.
- [2] L. Papula, *Mathematische Formelsammlung*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.
- [3] „www.spektrum.de,“ Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, [Online]. Available: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/poisson-gleichung/11435>. [Zugriff am 6 12 2019].
- [4] P. Sagirow, *Satellitendynamik*, Mannheim: Hochschulschriften Bibliographisches Institut, 1970.
- [5] G. R. G. S. Paul Wagner, *Einführung in die Physik*, Wien: Facultas Verlags- und Buchhandels AG, 2014.
- [6] F. Gustrau, *Angewandte Feldtheorie*, München: Carl Hanserverlag, 2018.
- [7] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, San Francisco, CA: Pearson Education, 2008.
- [8] A. Sommerfeld, *Electrodynamics*, New York: Academic Press, 1950.
- [9] „www.didaktik.physik.uni-muenchen.de,“ LMU München, [Online]. Available: <https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/sims/magneticfield/general/herleitung.html>. [Zugriff am 6 12 2019].
- [10] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- [11] G. W. Armin Kreuzberg, *Elektronik Tabellen Betriebs- und Automatisierungstechnik*, Braunschweig: Wetermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, 2009.
- [12] Joachim Herz Stiftung, „www.leifiphysik.de,“ [Online]. Available: <https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/elektromagnetische-induktion/grundwissen/ein-und-ausschalten-von-rl-kreisen>. [Zugriff am 11 September 2019].
- [13] A. R. Wolfgang Mathis, *Küpfmüller Theoretische Elektrotechnik*, Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2017.
- [14] V. N. J. S. Bernd Scharlau, „Magnetische Levitation,“ *Deutsche Physikalische Gesellschaft*, Augsburg, 2003.
- [15] M. Prof. Dr. Peter Zentgraf, „www.th-rosenheim.de,“ *atp Magazin*, 01 04 2019. [Online]. Available: https://www.th-rosenheim.de/fileadmin/user_upload/Fakultaeten_und_Abteilungen/Fakultaet_I_NG/Personal/Ze/EinNeuesVerfahrenZurModellierungLinearerSysteme_Zentgraf_RZ_atp_11-12_2019.pdf. [Zugriff am 28 12 2019].

